

**Die Wesenszüge der Quantenphysik
quantitativ und qualitativ
Die Quantenphysik entlang
von Realexperimenten mit
dem Quantenkoffer**

Autor: Jan-Niklas Cleve

Co-Autor: Prof. Dr. Heiko Krabbe

Gliederung

1 Einführung.....	1
2 Das Photon als Quantenobjekt.....	2
Exkurs: Erzeugung und Detektion von Einzelphotonen	8
Der Quantenkoffer	10
3 Die Wesenszüge der Quantenphysik.....	11
3.1 Die stochastische Vorhersagbarkeit	11
3.2 Die Eindeutigkeit von Messergebnissen.....	17
3.3 Die Fähigkeit zur Interferenz.....	19
3.4 Die Komplementarität.....	24
3.5 Die Verschränkung	26
4 Die Quantenkryptographie.....	34
5 Systematisierung und Mathematisierung - Das Verhalten von Quantenobjekten beschreiben.....	37
5.1 Beschreibung des Strahlteilers.....	38
5.2 Mathematisierung der Polarisations-Zustände	46
6 Der Photoeffekt und die Elektronenbeugung.....	49

1 Einführung

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts führten neue Experimente mit Licht und Elektronen zu Beobachtungen, die durch die klassische Physik nicht erklärt werden konnten. Infolgedessen entwickelte sich die Quantenphysik. Mit dieser wurde es möglich, das Verhalten von Elektronen und anderen Quantenobjekten zu beschreiben. Ein wegweisendes Experiment war dabei das Hallwachs-Experiment (1896), in dem der Photoeffekt entdeckt wurde, welcher auch in moderner Technik Anwendung findet.

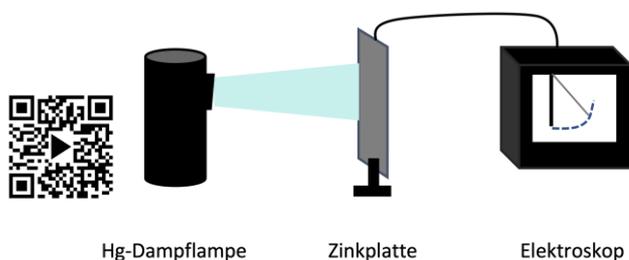


Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Hallwachs-Experiments

In dem Versuch (Abbildung 1) wurde untersucht, wie sich die Ladung einer Zinkplatte verhält, wenn die Platte mit dem vorwiegend ultravioletten Licht einer Quecksilberdampflampe bestrahlt wird. Wenn eine Zinkplatte positiv aufgeladen wird, behält diese ihre Ladung bei der Bestrahlung mit Licht. Wird die Zinkplatte negativ geladen, entlädt sie sich bei der Bestrahlung. Das ultraviolette Licht kann also Elektronen aus

einer Zinkplatte „herausschlagen“. Es findet ein Energie- und Impulsübertrag an Elektronen statt. Da Licht klassisch keinen Impuls besitzt, erscheint dies fragwürdig. Eine genauere Betrachtung der Ergebnisse führt zu weiteren Abweichungen von den klassischen Erwartungen. So tritt der Effekt im Versuch nur bei der Bestrahlung mit UV-Licht nicht aber mit sichtbarem Licht auf. Einstein deutete das Experiment 1905 mit Hilfe seiner Lichtquantenhypothese so, dass Licht aus kleinen, unteilbaren Energieportionen sogenannten *Lichtquanten (Photonen)* besteht, denen ein Impuls zugeschrieben werden kann. Diese können ihre Energie in einem Stoßprozess vollständig an ein Elektron übertragen und dieses aus der Zinkplatte herausschlagen.

„Nach der hier ins Auge zu fassenden Annahme ist bei Ausbreitung eines von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahles die Energie nicht kontinuierlich auf größer und größer werdende Räume verteilt, sondern es besteht dieselbe aus einer endlichen Zahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als ganze absorbiert und erzeugt werden können.“
(Albert Einstein, 1905)

2 Das Photon als Quantenobjekt

Einstein nahm zur Interpretation des Photoeffekts die Existenz von Photonen als Energieportionen des Lichts an. Die Existenz von Photonen konnte allerdings nicht unmittelbar experimentell bestätigt werden. Das Hallwachs-Experiment zeigt, dass die klassische Physik an ihre Grenzen kommt und erweitert werden muss. Es ist allerdings nicht klar, ob es das Licht ist, das noch nicht richtig beschrieben wird, oder ob es Prozesse in der Zinkplatte sind, die anders betrachtet werden müssen.

Um den Photoeffekt richtig beschreiben zu können, ist es notwendig zu entscheiden, ob Licht tatsächlich aus kleinen Energieportionen besteht, oder ob es zufällig auftretende Ereignisse in der Zinkplatte sind, die diesen Effekt hervorrufen. Im Laufe des 20. Jahrhunderts wurde in Versuchen die Existenz von Photonen als Energieportionen untersucht.

Strahlteilerexperimente

Wenn in einem Experiment gezeigt werden kann, dass Licht aus unteilbaren Portionen besteht, ist es sinnvoll das Licht als einen Strom von Photonen zu beschreiben. Zur Untersuchung der Unteilbarkeit von Licht geringer Intensität sind Experimente an Strahlteilern geeignet. Ein Strahlteiler ist ein optisches

Das Photon: Erste Modellvorstellung

Ein Photon ist die kleinste, unteilbare Energieportion von Licht. Photonen werden auch als Lichtquanten bezeichnet. Nach Einsteins Lichtquantenhypothese ist Licht ein Strom von Photonen. Dies lässt sich wie in Abbildung 2 darstellen.



Achtung!: Photonen sind keine Kugeln, oder Teilchen, aber das Modell gibt die Idee der Lichtquantenhypothese richtig wieder.

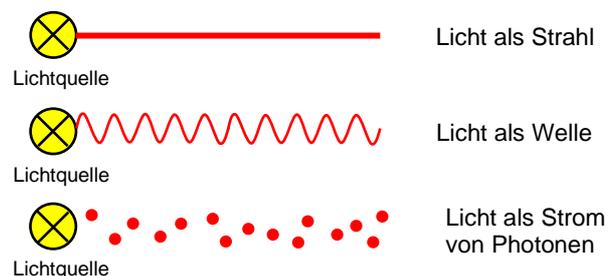


Abbildung 2: Die Ausbreitung von Licht als Strahl, Welle und Strom von Photonen nach der Vorstellung Einsteins



Bauteil, an dem einfallendes Licht teilweise transmittiert (durchgelassen) wird und teilweise reflektiert wird (siehe Abbildung 3). Dies ist zum Beispiel an einem halbdurchlässigen Spiegel der Fall. Es kann gleichzeitig durch ihn hindurchgesehen und das Spiegelbild betrachtet werden.

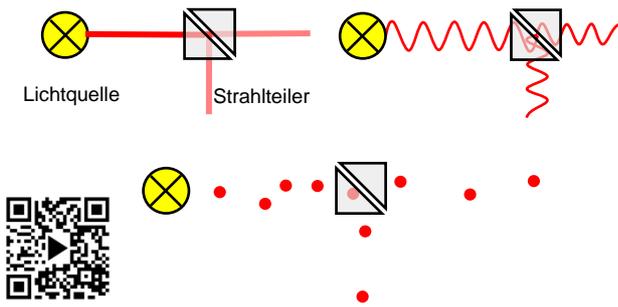


Abbildung 3: Aufteilung von Licht als Strahl, Welle und Strom von Photonen am Strahlteiler

Wenn es eine kleinste Energieportion gibt, kann diese am Strahlteiler entweder transmittiert (durchgelassen) oder reflektiert werden. Ein einzelnes Photon kann als kleinste Energieportion nicht teilweise transmittiert und reflektiert werden. Es kann sich nicht aufteilen. In Experimenten werden in der Regel Strahlteiler-Würfel verwendet. Sie werden als Quadrat gezeichnet, wobei eine Lücke in der Mitte die Fläche angibt, an der Licht teilweise reflektiert wird (siehe Abbildung 3).

1986 wurde von Grangier, Roger und Aspect ein Experiment durchgeführt, welches die Unteilbarkeit von Lichtportionen an einem Strahlteiler eindeutig zeigen konnte. Der Grund für den großen zeitlichen Abstand zur Lichtquantenhypothese liegt dabei in der technischen Herausforderung bei der Detektion kleiner Energien und der Suche nach einer geeigneten Lichtquelle. Grangier, Roger und Aspect führten das Experiment mit einer sogenannten

angekündigten Photonenquelle durch. In dieser besonderen Quelle wird Licht durch einen speziellen Prozess erzeugt und über zwei Ausgänge ausgesendet. (siehe „Exkurs: Erzeugung und Detektion von Einzelphotonen“ S.8-9) Das Licht aus dem ersten Ausgang wird dabei durch den eigentlichen Versuchsaufbau (z.B. den Strahlteiler) geschickt, während das Licht aus dem zweiten Ausgang der Ankündigung dient und in der Regel keinen speziellen Aufbau durchläuft.

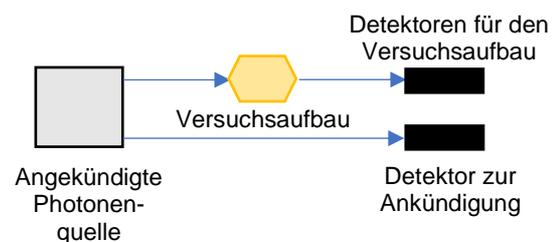


Abbildung 3: Schema für die Messung mit Ankündigung

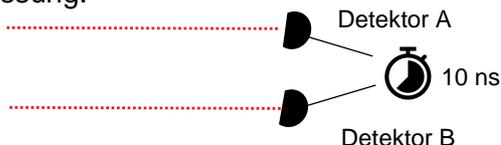
Ausgewertet werden, bei Verwendung dieser Lichtquelle, von den Ereignissen an den Detektoren für den Versuchsaufbau nur die Ereignisse, die „zeitgleich“ mit Ereignissen am Detektor zur Ankündigung detektiert werden. Durch diesen Trick kann das Licht der Quelle von dem Umgebungslicht unterschieden werden. Als ein „zeitgleiches“ Ereignis wird dabei der Fall bezeichnet, dass in einem sehr kurzen zeitlichen Abstand an mehreren Detektoren eine Detektion stattfindet. Ein solches zeitgleiches Ereignis wird *Koinzidenz* genannt.

Der maximale zeitliche Abstand von den Detektionen, für den diese gleichzeitig genannt werden, wird als *Koinzidenzfenster* τ bezeichnet. Typischerweise ist das Koinzidenzfenster wenige Nanosekunden groß.

„Wenn innerhalb von 1 ns (dem Koinzidenzfenster) bevor, oder nachdem ein Ereignis am Detektor zur Ankündigung registriert wird, ein Ereignis an einem Detektor hinter dem Versuchsaufbau detektiert wird, handelt es sich um ein gleichzeitiges Ereignis (eine Koinzidenz).“

In der folgenden Abbildung ist skizziert, wie aus den Ereignissen an den verschiedenen Detektoren die Koinzidenzen ermittelt werden können.

Messung:



Ereignisse:

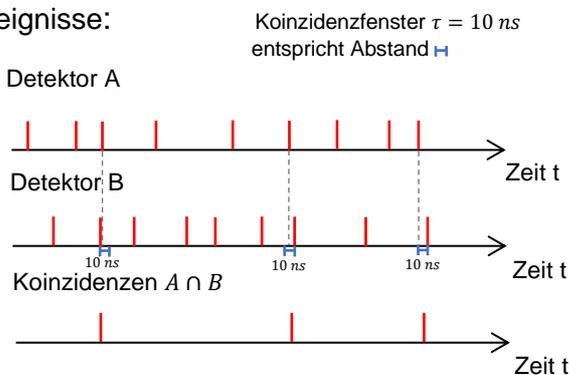
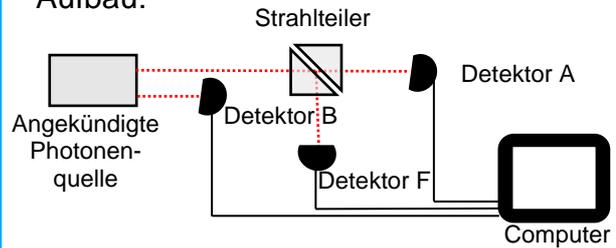


Abbildung 4: Gleichzeitigkeit - Was ist eine Koinzidenz?

Versuch 1: Antikorrelation am Strahlteiler

Aufbau:



Eine angekündigte Photonenquelle sendet Licht mit einer geringen Intensität durch zwei Ausgänge aus. Das Licht aus einem Ausgang wird als Ankündigung an Detektor B detektiert. Das Licht aus dem anderen Ausgang trifft auf einen 50/50-Strahlteiler. Hinter den beiden Ausgängen des Strahlteilers wird mit den Detektoren A und F einfallendes Licht detektiert. Das Signal wird durch einen Computer verarbeitet und ausgegeben. Dieser wertet dabei aus, mit welchem zeitlichen Abstand Signale an den drei Detektoren ankommen. Wird sowohl an Detektor A als auch an Detektor B innerhalb des eingestellten Koinzidenzfensters $\tau = 1 \text{ ns}$ Licht detektiert, wird dies als ein gleichzeitiges Ereignis, eine Koinzidenz $A \cap B$, interpretiert und vom Computer als solche ausgegeben. Analog erfolgt die Ausgabe der Koinzidenzen $F \cap B$ für gleichzeitige Ereignisse an den Detektoren F und B und der Dreifach-Koinzidenzen $A \cap F \cap B$, wenn innerhalb von $\tau = 1 \text{ ns}$ an allen drei Detektoren Licht detektiert wird.



Video: Versuch 1

Im Versuch zeigt sich, dass in einer ähnlichen Größenordnung Koinzidenzen $A \cap B$ und Koinzidenzen $F \cap B$ detektiert werden. Die Zählrate der Dreifach-Koinzidenzen $A \cap F \cap B$ ist deutlich niedriger. Dies bedeutet, dass angekündigte Ereignisse an Detektor A und angekündigte Ereignisse an Detektor F nur selten gleichzeitig stattfinden.

Achtung! Da die Zählrate der Dreifach-Koinzidenzen $A \cap F \cap B$ gering, aber nicht 0, ist, kann nicht direkt gefolgert werden, dass Licht aus unteilbaren Photonen besteht. Nimmt man wie beim Photoeffekt an, dass Licht aus unteilbaren kleinsten Energieportionen besteht, lässt sich das Experiment so deuten, dass die Photonen unteilbar sind und deshalb nur wenige Dreifach-Koinzidenzen auftreten.

Die Zählraten müssen allerdings genauer betrachtet werden, um auszuschließen, dass es sich vielleicht doch um zufällige Prozesse im Detektor handelt, die diese Zählraten erklären können.

Jede Koinzidenz $A \cap B$ besteht aus einem Ereignis an Detektor B und einem Ereignis an Detektor A. Genauso entspricht jede Koinzidenz $F \cap B$ einem Ereignis an Detektor B und einem Ereignis an Detektor F und jede Dreifach-Koinzidenz $A \cap F \cap B$ einem Ereignis an Detektor B und einer Koinzidenz $A \cap F$. Daher können Wahrscheinlichkeiten dafür angegeben werden, dass ein Ereignis an Detektor B gleichzeitig auch Teil einer der Koinzidenzen ist. Mit den Zählraten n_B für die Ereignisse an Detektor B, $n_{A \cap B}$ für die Koinzidenzen $A \cap B$, $n_{F \cap B}$ für die Koinzidenzen $F \cap B$ und $n_{A \cap F \cap B}$ für die Dreifach-Koinzidenzen $A \cap F \cap B$ können diese Wahrscheinlichkeiten berechnet werden:

$$P_{A \cap B} = \frac{n_{A \cap B}}{n_B}$$

$$P_{F \cap B} = \frac{n_{F \cap B}}{n_B}$$

$$P_{A \cap F \cap B} = \frac{n_{A \cap F \cap B}}{n_B}$$

Beispiel: Wenn an Detektor B 100 Ereignisse pro Sekunde detektiert werden und 10 Koinzidenzen $A \cap B$ pro Sekunde detektiert werden, also bei 10 der 100 Ereignisse pro Sekunde an Detektor B gleichzeitig ein Ereignis an Detektor A detektiert wird, ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis an Detektor B Teil einer Koinzidenz zu sein:

$$P_{A \cap B} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

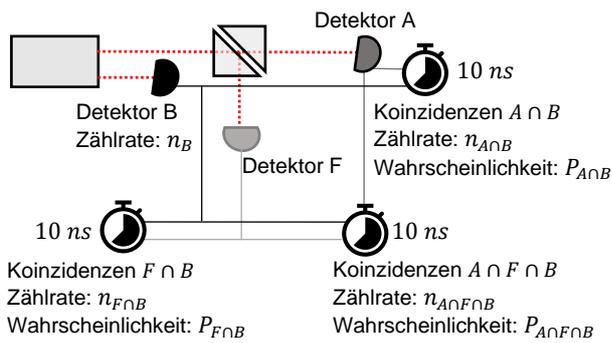


Abbildung 5: Übersicht über die Zählraten und Wahrscheinlichkeiten im Aufbau

Wenn die Zählraten an den Detektoren nun durch zufällige Ereignisse in den Detektoren bestimmt würden, wären die Ereignisse in den verschiedenen Detektoren unabhängig voneinander und es müsste gelten:

$$P_{A \cap F \cap B} = P_{A \cap B} \cdot P_{F \cap B}$$

Beispiel: Wenn durchschnittlich bei jedem zehnten Ereignis an Detektor B gleichzeitig ein Ereignis an Detektor A detektiert wird und bei jedem 15. Ereignis an Detektor B gleichzeitig ein Ereignis an Detektor F detektiert wird, wäre zu erwarten, dass im Durchschnitt bei jedem 150. Ereignis an Detektor B gleichzeitig auch ein Ereignis an Detektor A und ein Ereignis an Detektor F detektiert wird.

Durch Umstellen der obigen Formel müsste gelten:

$$\frac{P_{A \cap F \cap B}}{P_{A \cap B} \cdot P_{F \cap B}} = 1$$

Mit dem Einsetzen der Gleichungen für die Wahrscheinlichkeiten ergibt sich:

$$\frac{n_{A \cap F \cap B}}{n_B} \cdot \frac{n_{A \cap B}}{n_B} \cdot \frac{n_{F \cap B}}{n_B} = 1$$

Und gekürzt:

$$\frac{n_{A \cap F \cap B} \cdot n_B}{n_{A \cap B} \cdot n_{F \cap B}} = 1$$

Wenn die Zählraten aus Versuch 1 in diese Gleichung eingesetzt werden, ergibt sich allerdings:

$$\frac{n_{A \cap F \cap B} \cdot n_B}{n_{A \cap B} \cdot n_{F \cap B}} = \frac{12 \cdot 747945}{16506 \cdot 8747} \approx 0,06$$

$$\frac{n_{A \cap F \cap B} \cdot n_B}{n_{A \cap B} \cdot n_{F \cap B}} \ll 1$$

Das heißt, dass es deutlich weniger Dreifach-Koinzidenzen gibt, als erwartet würden, wenn zufällige Prozesse im Detektor die Zählraten bestimmten. Dieser Wert kann nur erklärt werden, wenn Licht aus unteilbaren Energieportionen, den Photonen, besteht.

Aus einer geringeren Anzahl an Dreifach-Koinzidenzen als zufällig zu erwarten wäre, folgt direkt die Existenz von unteilbaren Photonen.

Die Existenz der Photonen lässt sich in Versuch 1 nur zeigen, da die spezielle Photonenquelle verwendet wird. Würde im Versuch ein schwacher Laser genutzt, könnte die mögliche Erklärung

durch zufällige Prozesse im Detektor nicht ausgeschlossen werden. In dem Licht eines Lasers sind die Photonen zufällig verteilt. Insbesondere können mehrere Photonen in beliebig kurzen Zeitabständen detektiert werden. Es können 2 Photonen gleichzeitig an einem Strahlteiler ankommen, wobei

eines transmittiert (durchgelassen) und das andere reflektiert wird. Ob die Photonen im Lichtstrahl zufällig verteilt sind, oder der Detektor zufällig Ereignisse ausgibt, wäre dabei nicht unterscheidbar. Bei der angekündigten Photonenquelle werden Photonen in regelmäßigeren Abständen ausgesendet.

Angekündigte Photonenquelle:

$$P_{A \cap B \cap T} \ll P_{A \cap T} \cdot P_{B \cap T}$$

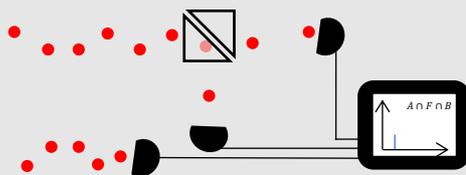
Es werden deutlich weniger Dreifach-Koinzidenzen detektiert, als durch Zufallsprozesse zu erwarten sind.

Kann klassisch nicht erklärt werden!

⇒ Photonen als unteilbare kleinste Energieportionen des Lichts existieren.

Quantenphysikalische Interpretation:

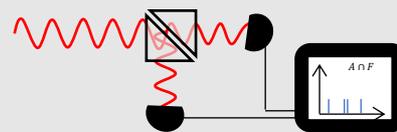
Einzelne Photonen (zeitlich getrennt) treffen auf den Strahlteiler und lassen sich nicht aufteilen.



Schwacher Laser:

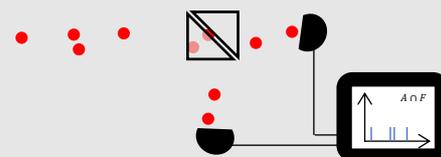
Es werden genauso viele Koinzidenzen detektiert, wie durch Zufallsprozesse zu erwarten sind.

Klassische Interpretation: Eine Lichtwelle trifft auf Detektor, der zufällig Ereignisse registriert.



Quantenphysikalische Interpretation:

Photonen sind im Licht zufällig verteilt, sodass auch mehrere in kurzen Abständen den Strahlteiler treffen können



Exkurs: Erzeugung und Detektion von Einzelphotonen

Jede Lichtquelle sendet Photonen aus, da Licht aus Photonen besteht. Für die Experimente wird eine Lichtquelle benötigt, die die Photonen so aussendet, dass das Verhalten einzelner Photonen untersucht werden kann. Eine solche Quelle ist die angekündigte Photonenquelle.

Die angekündigte Photonenquelle

In einer angekündigten Photonenquelle werden Paare von Photonen erzeugt. Dadurch, dass die Photonen paarweise ausgesendet und auch detektiert werden können, kann bei der Detektion unterschieden werden, ob es sich um Photonen handelt, die von der Quelle erzeugt wurden, oder ob diese z.B. aus dem Umgebungslicht stammen. An den Photonen eines solchen Paares lässt sich dann das Verhalten einzelner Photonen untersuchen. Die Photonenpaare werden bei dieser Quelle in einem Kristall erzeugt.

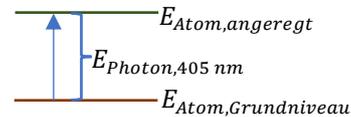
1.Schritt: Ein Laser (Pumplaser) sendet Photonen mit der Wellenlänge 405 nm aus.



2.Schritt: Die Photonen treffen auf einen Kristall (BBO).



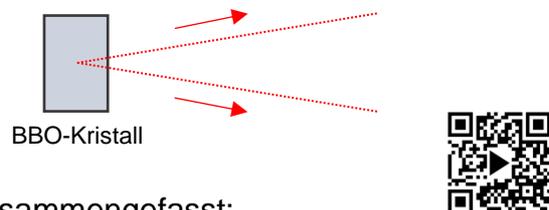
3.Schritt: Der Kristall absorbiert ein Photon und nimmt dessen Energie auf. Energieniveau des Atoms:



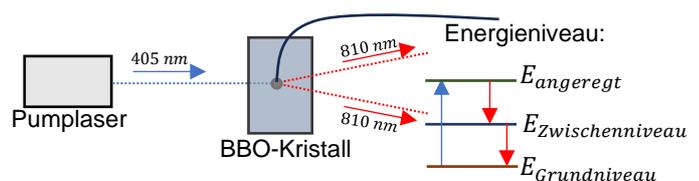
4.Schritt: Der Kristall gibt die Energie in zwei Schritten wieder ab. Dabei werden zwei Photonen der Wellenlänge 810 nm ausgesendet.



5.Schritt: Die Photonen (810 nm) verlassen den Kristall in verschiedene Richtungen.



Zusammengefasst:



Bei der Erzeugung der Photonen, also der Anregung und Abregung des Kristalls gelten Energie- und Impulserhaltung. Da die Energie eines Photons antiproportional zur Wellenlänge ist, ist die Wellenlänge der Photonen des Photonenpaares doppelt so groß, wie die der Pumpphotonen. Die ausgesendeten Photonen liegen auf einem Kegel,

wobei sich die Photonen eines Paares aufgrund der Impulserhaltung an den gegenüberliegenden Seiten des Kegels befinden.

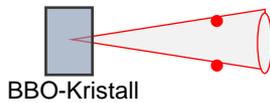


Abbildung 6: Der Emissionskegel am BBO
Die Detektoren decken nur einen kleinen Teil des Kegels ab, sodass nur ein geringer Anteil der in der Quelle erzeugten Photonen auch tatsächlich den Aufbau durchläuft und detektiert wird.

Die Detektion von Photonen mit Avalanche-Photodioden (APDs)

Die Detektion von Photonen nutzt den Photoeffekt, der in Abschnitt 6 genauer behandelt wird. Das Grundprinzip ist dabei, dass Photonen eine Energie und ein Impuls zugeschrieben werden, die diese an Elektronen abgeben können, wobei die Photonen absorbiert werden. Es wird also ein Photonen-Strom in einen elektrischen Strom umgewandelt. Elektrische Signale können gut weitergeleitet und mit Hilfe von Computern ausgewertet werden. Da als Photonenquellen bewusst Quellen genutzt werden, die verhältnismäßig wenige Photonen aussenden, wird durch den Photoeffekt nur an wenige Elektronen Energie übertragen und kein ausreichender Strom erzeugt, als dass dieser verarbeitet und ausgewertet werden kann.

Avalanche-Photodioden nutzen zunächst den Photoeffekt und verstärken dann das Signal, sodass eine Weiterverarbeitung möglich wird. „Avalanche“ ist Englisch und bedeutet Lawine. Diese ist namensgebend, da die Verstärkung der einer Schneelawine ähnelt.

Ein Photon, das detektiert wird, trifft auf ein Elektron in der Photodiode und wird absorbiert, wobei Energie und Impuls an das Elektron übertragen werden. Dieses Elektron trifft auf weitere Elektronen und gibt in Stoßprozessen Teile seiner Energie und seines Impulses an diese ab. Diese Elektronen stoßen wiederum mit anderen Elektronen, sodass die Anzahl der Elektronen, die sich durch den Detektor bewegen, immer größer wird. Dadurch wird auch das Signal größer.

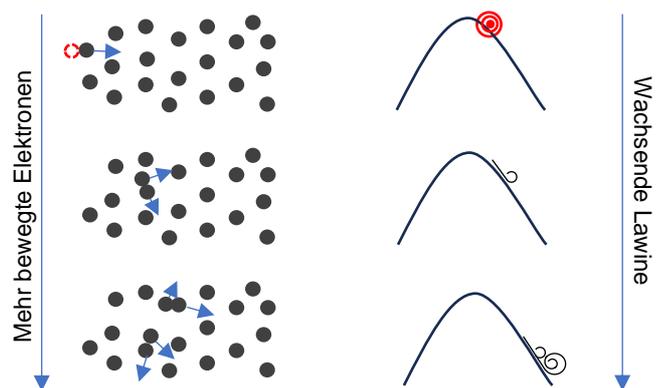


Abbildung 7: Analogie Elektronenlawine und Lawine

Aus dem gemessenen Strom kann eine Zählrate des Detektors bestimmt werden, die angibt wie viele Photonen detektiert wurden.

Der Quantenkoffer

Die Experimente, die in diesem Lehrgang eingesetzt werden, sind größtenteils mit dem Quantenkoffer durchführbar. Der Quantenkoffer besteht aus einem großen Bildschirm, an dem Messwerte angezeigt werden können, einem Spielfeld, auf dem mit optischen Bauteilen Experimente aufgebaut werden können, und Knöpfen, sowie einem Touchscreen zur Steuerung. Zudem

befinden sich verborgen im Inneren des Koffers eine angekündigte Photonenquelle für Experimente mit einzelnen Photonen und Justierlaser, mit denen mit klassischem Licht experimentiert werden kann. Zur Detektion des Lichts sind Avalanche-Photodioden eingebaut, die abhängig von der verwendeten Lichtquelle in verschiedenen Modi betrieben werden können.

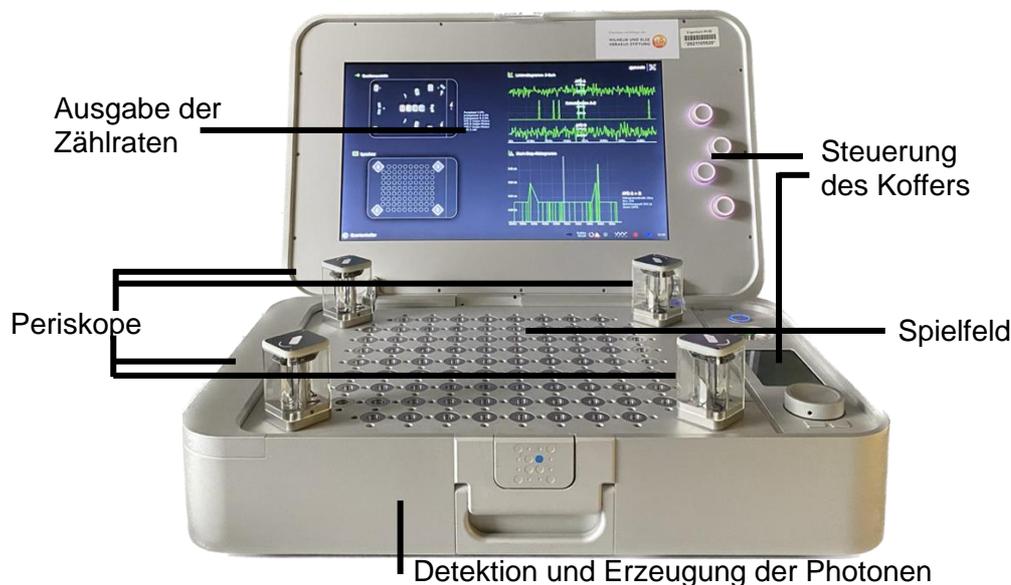


Abbildung 8: Der Aufbau des Quantenkoffers

Auf die Bedeutung verschiedener Diagramme zur Ausgabe der Zählraten, wird bei der Verwendung eingegangen. Standard ist die Ausgabe als Liniendiagramm, bei der die Höhe der Linie angibt, wie viel Licht, das heißt wie viele Photonen, detektiert wurden. Eine hohe Zählrate entspricht vielen Photonen, die detektiert wurden.

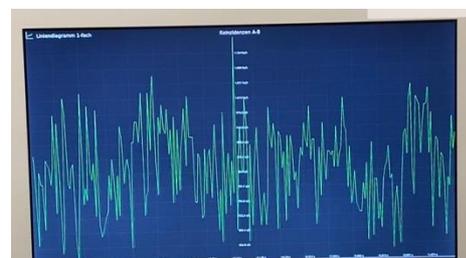


Abbildung 9: Das Liniendiagramm am Quantenkoffer

3 Die Wesenszüge der Quantenphysik

Nachdem mit Hilfe der Strahlteilerexperimente gezeigt werden konnte, dass Photonen als kleinste Energieportionen existieren, wird in diesem Abschnitt betrachtet, wie sich die Photonen als Quantenobjekte in Experimenten verhalten. Das Verhalten von Quantenobjekten wird durch die sogenannten Wesenszüge der Quantenphysik beschrieben. Die Wesenszüge sind, auch wenn sie hier am Beispiel von Photonen eingeführt werden, auf andere Quantenobjekte wie Elektronen übertragbar.

3.1 Die stochastische Vorhersagbarkeit

1. Wesenszug: Die stochastische Vorhersagbarkeit

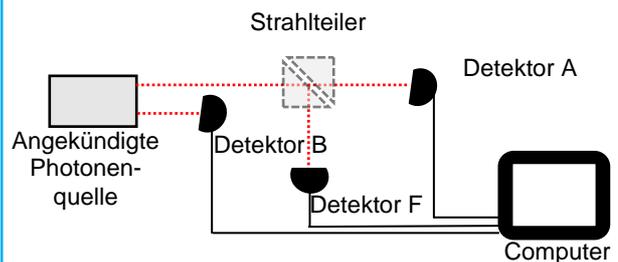
Einzelne Messergebnisse können in der Quantenphysik in der Regel nicht vorhergesagt werden. Es lassen sich jedoch Wahrscheinlichkeiten für den Ausgang eines Experiments angeben.

Während es in der klassischen Physik in der Regel Formeln gibt, mit denen der Ausgang von Experimenten berechnet und vorhergesagt werden kann, ist dies in der Quantenphysik nicht der Fall. Dies liegt nicht daran, dass die richtigen Formeln nur noch nicht gefunden worden sind. Vielmehr ist das Verhalten einzelner Quantenobjekte nicht direkt berechenbar und vorhersagbar. Dieser

Wesenszug lässt sich in Experimenten am Strahlteiler beobachten. Für ein einzelnes Photon, das auf einen 50/50-Strahlteiler trifft, kann nicht vorhergesagt werden, ob dieses an dem Strahlteiler transmittiert (durchgelassen) oder reflektiert wird. Es können allerdings Wahrscheinlichkeiten dafür angegeben werden, dass entweder eine Transmission oder eine Reflektion stattfindet.

Versuch 2: Das Verhalten von Einzelphotonen am Strahlteiler

Aufbau:

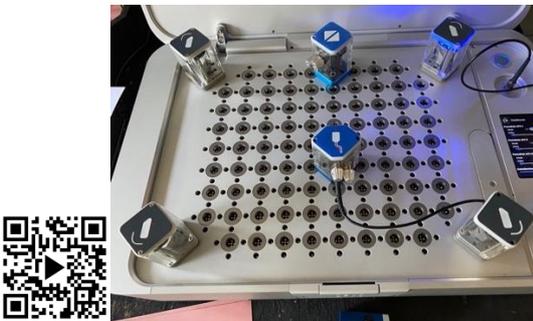


Eine angekündigte Photonenquelle sendet aus zwei Ausgängen Photonen aus. Die Photonen aus einem Ausgang werden zur Ankündigung an Detektor B detektiert.

Die Photonen aus dem anderen Ausgang werden zunächst direkt an Detektor A detektiert und die Zählrate für die Koinzidenzen $A \cap B$ ausgegeben. Dann wird in den Strahlengang ein 50/50-Strahlteiler eingesetzt. Hinter den beiden Ausgängen des Strahlteilers werden mit den Detektoren A und F ankommende Photonen detektiert.

Das Signal wird durch einen Computer verarbeitet und die gleichzeitigen Ereignisse (innerhalb eines Koinzidenzfensers $\tau = 1ns$) an den Detektoren werden als Koinzidenzen ausgegeben. Es werden zunächst mit einer hohen Intensität Photonen emittiert. Anschließend wird der Pumplaser so weit heruntergeregelt, dass nur noch einzelne Koinzidenzen $A \cap B$ und $F \cap B$ pro Sekunde angezeigt werden.

Photon reflektiert, bzw. transmittiert zu werden jeweils 50% beträgt. Bei einer niedrigen Intensität des Pumplasers können einzelne Ereignisse an den Detektoren beobachtet werden. Diese folgen keinem Muster. Es ist nicht vorhersehbar, ob das nächste detektierte Photon transmittiert oder reflektiert wird, ob es an Detektor A oder Detektor F detektiert wird. Es zeigt sich im Experiment, dass für ein Photon am Strahlteiler nur die Wahrscheinlichkeit vorhergesagt werden kann, dass dieses transmittiert oder absorbiert wird, nicht aber welche Möglichkeit für das einzelne Photon realisiert wird.



Video: Versuch 2

Bei einer hohen Intensität bleiben die Zählraten der Koinzidenzen (an den Detektoren gleichzeitig detektierte Photonen pro Sekunde) annähernd konstant. Wird der Strahlteiler eingesetzt, werden etwa gleich viele Photonen hinter den beiden Ausgängen des Strahlteilers detektiert. Die Zählraten der detektierten Photonen, die transmittiert bzw. reflektiert werden, ist dabei etwa halb so groß wie die Zählrate, die vor dem Einsetzen des Strahlteilers gemessen wird. Dieses Ergebnis entspricht der Eigenschaft des 50/50-Strahlteilers, dass die Wahrscheinlichkeit für ein

Der Polarisations-Zustand

Die Eigenschaft der stochastischen Vorhersagbarkeit kann auch bei anderen Messungen an Photonen beobachtet werden. Eine Möglichkeit neben der Transmission und Reflektion am Strahlteiler ist zum Beispiel die Beobachtung des Verhaltens von Photonen an Polarisationsfiltern. In der klassischen Physik wird mit Polarisationsfiltern die Polarisationsrichtung von Lichtwellen untersucht. Als Polarisation wird bei elektromagnetischen Wellen die Schwingungsrichtung der Welle bezeichnet. Dabei kann Licht, wenn es unpolariert ist, also keine eindeutige Schwingungsrichtung aufweist an einem Polarisationsfilter polarisiert werden, da

dieser nur den Teil des Lichts durchlässt, der eine Schwingungsrichtung parallel zur Messrichtung des Polarisationsfilters aufweist.

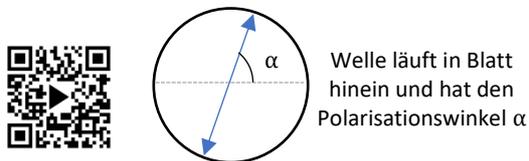


Abbildung 10: Darstellung der Polarisationsrichtung einer ins Blatt laufenden Welle am Kreis

Die Polarisationsrichtung kann durch einen Polarisationswinkel α angegeben werden (siehe Abbildung 10). In Abbildung 11 ist dargestellt, wie groß die Intensität des Lichts hinter dem Polarisationsfilter im Vergleich zur Intensität vor dem Polarisationsfilter ist, wenn vertikal polarisiertes Licht auf einen Polarisationsfilter mit verschiedenen Ausrichtungen trifft.

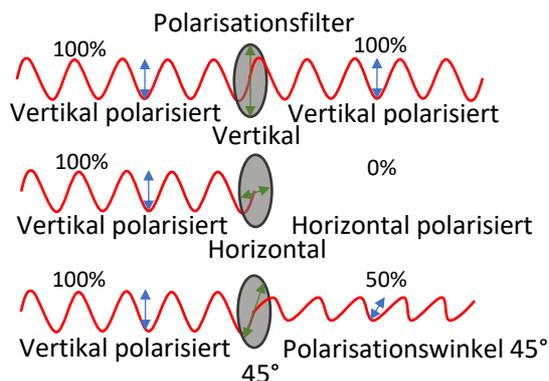
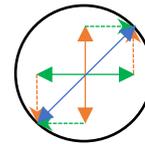


Abbildung 11: Licht am Polfilter

Dies lässt sich auf andere Polarisationsrichtungen übertragen. Insbesondere kann im Winkel 45° polarisiertes Licht zu 50% als vertikal und zu 50% als horizontal polarisiert betrachtet werden.



45° : Intensität 100%
Vertikal: Intensität 50%
Horizontal: Intensität 50%

Abbildung 12: Aufteilung der Polarisation 45° in vertikal und horizontal

Für Photonen ist es nicht möglich von der Polarisation als einer Schwingungsrichtung einer Welle zu sprechen, da Photonen als Quantenobjekte keine Wellen sind. Das Konzept der Polarisation lässt sich daher nicht direkt auf Photonen übertragen. Photonen kann allerdings ein sogenannter *Polarisations-Zustand* zugeschrieben werden, wie der folgende Versuch 3 zeigt. Während sich für Licht als elektromagnetische Welle am Polarisationsfilter die Amplitude und die Polarisationsrichtung der Welle verändern, können einzelne Photonen am Strahlteiler entweder transmittiert oder absorbiert werden.

„Wenn Photonen auf einen Polarisationsfilter treffen, wird der Polarisations-Zustand der Photonen gemessen.“

Die Photonen, die dabei transmittiert werden, befinden sich im Polarisations-Zustand, der der Einstellung des Polarisationsfilters entspricht, zum Beispiel:

„Das Photon befindet sich im Polarisations-Zustand vertikal/ 90° oder horizontal/ 0° .“

In der angekündigten Photonenquelle befinden sich zwei BBO-Kristalle, die

miteinander verklebt sind. In dem ersten werden, bei Bestrahlung mit horizontal polarisiertem Licht des Pumpasers, Photonen im Polarisations-Zustand vertikal erzeugt. In dem zweiten werden, bei der Bestrahlung mit vertikal polarisiertem Laserlicht, Photonen im Polarisations-Zustand horizontal erzeugt.

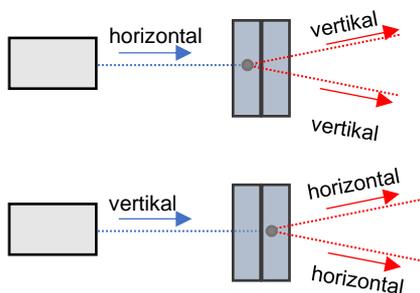
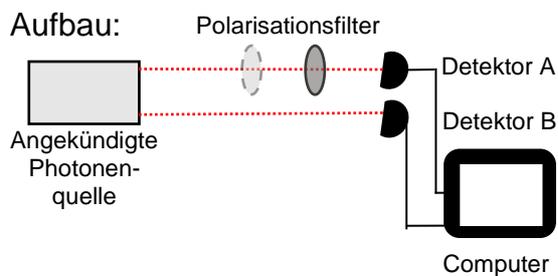


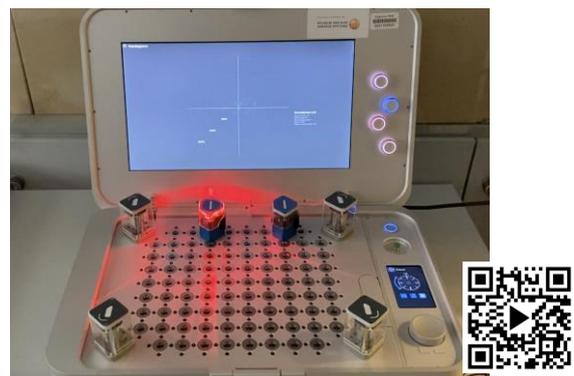
Abbildung 13: Polarisation am BBO-Kristall

Versuch 3: Photonen am Polarisationsfilter



Eine angekündigte Photonenquelle sendet aus zwei Ausgängen Photonen aus. Das Licht des Pumpasers ist zu Beginn horizontal polarisiert. Die Photonen aus einem Ausgang werden zur Ankündigung an Detektor B detektiert. Die Photonen aus dem anderen Ausgang treffen auf einen Polarisationsfilter. Hinter dem Polarisationsfilter

werden sie an Detektor A detektiert. Das Signal wird durch einen Computer verarbeitet und die gleichzeitigen Ereignisse (innerhalb eines Koinzidenzfensers $\tau = 1 \text{ ns}$) an den Detektoren werden als Koinzidenzen $A \cap B$ ausgegeben. Die Einstellung des Polarisationsfilters wird zwischen den Winkeln 0° , 45° , 90° und 135° variiert. Anschließend wird der Filter in Rotation versetzt. Die Polarisation des Lichts des Pumpasers an der Photonenquelle wird auf 45° umgeschaltet. Dabei bleibt der Polarisationsfilter in Rotation. Ein zweiter Polarisationsfilter wird vor den rotierenden Filter gesetzt und durch Variation der Einstellungen des zusätzlichen Polfilters zwischen den Winkeln 0° , 45° , 90° und 135° wird untersucht, welchen Einfluss das hintereinander setzen zweier Polarisationsfilter auf die Zählraten hat.



Video: Versuch 3

Während der Polarisationsfilter rotiert, wird die Zählrate in einem Polardigramm in Abhängigkeit von dem eingestellten Winkel betrachtet.

Im Polardiagramm wird die Zählrate des Detektors für eine bestimmte Einstellung des Polarisationsfilters als ein Punkt im Winkel der Einstellung des Polarisationsfilters aufgetragen, wobei der Abstand zum Zentrum die Zählrate angibt (Abbildung 14).



Abbildung 14: Polardiagramm

Wenn das Licht des Pumplasers horizontal polarisiert ist, wird eine maximale Zählrate bei der Messung des Polarisations-Zustands vertikal $|V\rangle$ gemessen. Für die vertikale Einstellung des Polarisationsfilters sind die Punkte in großem Abstand zum Zentrum aufgetragen. Dies bedeutet, dass die Zählrate für die vertikale Einstellung besonders groß ist. Bei der horizontalen Einstellung befinden sich die Punkte entsprechend nah am Zentrum. Für den Polarisationszustand horizontal $|H\rangle$ ist die Zählrate minimal (fast 0). Dies ergibt sich im Polardiagramm zu einer „8“. Bei anderen Winkeln werden einige Photonen am Polarisationsfilter transmittiert und einige absorbiert. Dies zeigt, dass bei der

Kurzschreibweise von Zuständen:

Um Zustände von Quantenobjekten kurz schreiben zu können, wird die Bra-Ket-Notation genutzt:

Strahlteiler: $|T\rangle$ „transmittiert“

$|R\rangle$ „reflektiert“

Polarisationsfilter:

$|H\rangle$ bzw. $|0^\circ\rangle$

„Polarisationszustand horizontal“

$|V\rangle$ bzw. $|90^\circ\rangle$

„Polarisationszustand vertikal“

$|\alpha\rangle$ „Polarisationszustand α “

Dabei werden die Informationen über die Zustände in Klammern $|\dots\rangle$ notiert.

ersten Einstellung der Quelle Photonen im Zustand $|V\rangle$ emittiert werden.

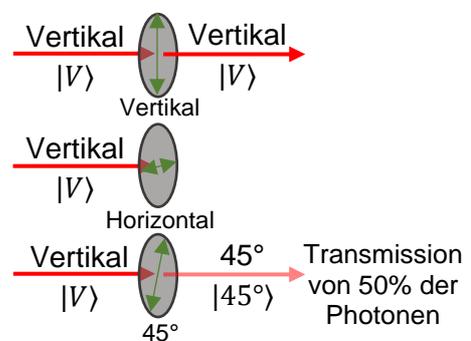


Abbildung 15: Polarisations-Zustände am Polarisationsfilter

Wenn das Licht des Pumplasers im Winkel 45° polarisiert ist, ist die Zählrate bei Rotation des Polarisationsfilters fast konstant. Es ergibt sich ein Kreis im Polardiagramm. Bei dieser Einstellung der Quelle ist der Polarisations-Zustand der Photonen somit unbestimmt. Für keine Einstellung des Polarisationsfilters kann

eindeutig vorhergesagt werden, ob ein Photon transmittiert oder reflektiert wird. Während im ersten Versuchsteil nur im vorderen Kristall Photonen erzeugt werden und daher der Polarisations-Zustand bestimmt ist, ist im zweiten Versuchsteil nicht bestimmt, ob ein Photon im vorderen oder hinteren Kristall erzeugt wird.

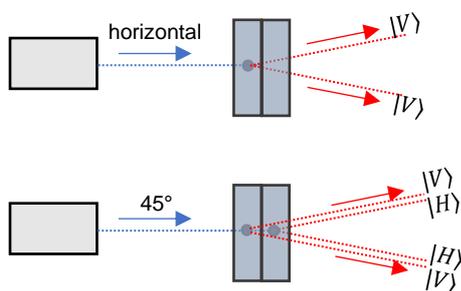


Abbildung 16: Polarisation am BBO

Werden im zweiten Teil des Versuchs zwei Polarisationsfilter hintereinander gesetzt, wobei der vordere auf eine feste Polarisation eingestellt ist und der zweite rotiert, zeigt sich im Polardigramm erneut eine „8“. Diese zeigt in die Richtung der Einstellung des ersten Polarisationsfilters. Am ersten Polarisationsfilter wird an den Photonen, deren Polarisations-Zustand vorher unbestimmt war, also ein Polarisations-Zustand ausgewählt und für weitere Messungen vorbereitet: *Präpariert*. Dieser Polarisationsfilter wird auch als *Präparator* bezeichnet. Mit dem zweiten Polarisationsfilter wird der Polarisations-Zustand der Photonen *analysiert*. Dieser wird auch als *Analysator* bezeichnet.

„An einem ersten Polarisationsfilter, dem Präparator wird der Polarisations-Zustand von Photonen präpariert, bevor er an einem zweiten Polarisationsfilter, dem Analysator analysiert wird.“

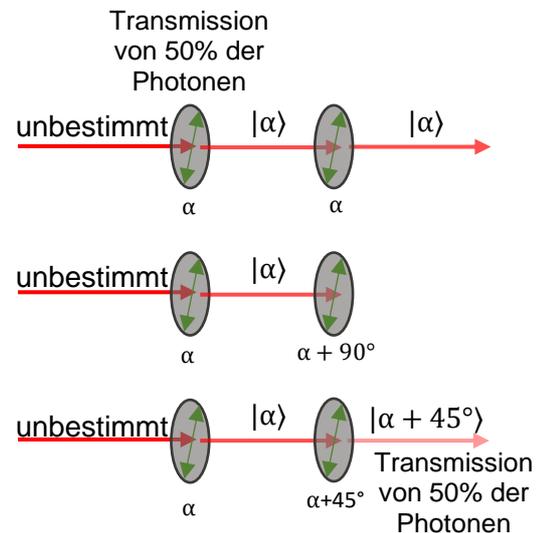


Abbildung 17: Präparation und Analyse an Polarisationsfiltern – Mehrfache Polarisationsmessung

Der Einfluss von zwei aufeinanderfolgenden Polarisationsfiltern, ist in Abbildung 17 skizziert. Es fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeiten für Transmission und Absorption am Strahlteiler für Photonen genau den Anteilen des Lichtes als elektromagnetische Welle entsprechen, die transmittiert oder absorbiert werden. Dadurch können, auch wenn Polarisations-Zustände keine Schwingungsrichtung angeben, mathematische Beschreibungen aus der klassischen Betrachtung von Schwingungsrichtungen, wie die Aufteilung von Polarisationsrichtungen (siehe Abbildung 12) übernommen werden.

3.2 Die Eindeutigkeit von Messergebnissen

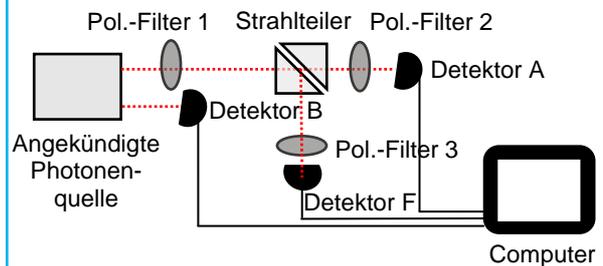
2. Wesenszug: Die Eindeutigkeit von Messergebnissen

Messungen zwingen Quantenobjekte einen eindeutigen Messwert anzunehmen, auch wenn diese vorher in einem Zustand waren, für den der Wert unbestimmt ist. Bei wiederholter Messung werden die Messwerte bestätigt.

Der Messung kommt in der Quantenphysik eine besondere Rolle zu. Bei einer Messung wird der Zustand eines Quantenobjektes eindeutig bestimmt, selbst wenn dieser vorher unbestimmt war. Werden hinter einem Strahlteiler Photonen detektiert, wird bestimmt, ob sich ein Photon in einem Zustand $|T\rangle$ transmittiert oder einem Zustand $|R\rangle$ reflektiert befindet, obwohl dies vorher, bis zur Messung unbestimmt ist. An Polarisationsfiltern wird der Polarisationszustand gemessen. Unabhängig davon, ob es einen bestimmten Polarisationszustand hatte und in welchem Polarisationszustand sich das Photon vorher befand, befindet es sich, wenn es transmittiert wird, in dem Polarisationszustand, der der Einstellung des Polarisationsfilters entspricht. Dies wurde bereits in Versuch 3 sichtbar. Besonders deutlich wird der zweite Wesenszug in Versuch 4, in dem die Analyse nach einem Strahlteiler in entgegengesetzten Winkeln stattfindet.

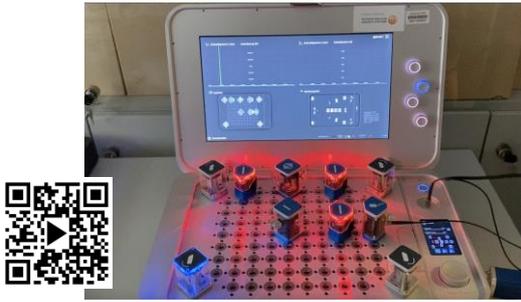
Versuch 4: Wiederholte Messung der Polarisations-Zustände

Aufbau:



Eine angekündigte Photonenquelle, bei der das Licht des Pumpasers im Winkel 45° polarisiert ist, sendet aus zwei Ausgängen Photonen aus, deren Polarisationszustand unbestimmt ist. Die Photonen aus einem Ausgang werden zur Ankündigung an Detektor B detektiert. Hinter dem anderen Ausgang befindet sich zunächst der Polarisationsfilter 1 und dahinter ein Strahlteiler. Hinter den beiden Ausgängen des Strahlteilers befindet sich jeweils ein Polarisationsfilter (2&3). Detektor A detektiert Photonen, die am Strahlteiler transmittiert werden. Detektor F detektiert Photonen, die am Strahlteiler reflektiert werden. Das Signal wird durch einen Computer verarbeitet und die gleichzeitigen Ereignisse (innerhalb eines Koinzidenzfensters $\tau = 10ns$) an den Detektoren werden als Koinzidenzen ausgegeben.

Für verschiedene Einstellungen von Polarisationsfilter 1 werden die Polarisationsfilter 2 und 3 genau wie Filter 1, oder entgegengesetzt zur Einstellung dessen, eingestellt.



Video: Versuch 4

Zu jeder Einstellung des Präparators (Polarisationsfilter 1) gibt es eine Einstellung der Analysatoren (Polarisationsfilter 2&3), sodass fast alle am Strahlteiler transmittierten Photonen Detektor A erreichen und fast keine reflektierten Photonen Detektor F erreichen und umgekehrt. Das Experiment zeigt, dass eine Messung den Zustand von Quantenobjekten eindeutig festlegt und sich bei erneuter Messung bestätigen lässt.

Werden die Zustände $|V\rangle$ vertikal, oder $|H\rangle$ horizontal an Filter 1 präpariert, erreichen die Photonen bei gleicher Einstellung der Analysatoren die Detektoren. Bei entgegengesetzten Einstellungen werden sie an den Polarisationsfiltern absorbiert.

Für die präparierten Zustände $|45^\circ\rangle$ und $|-45^\circ\rangle$ gilt im transmittierten Strahlengang, der an Detektor A detektiert wird, dasselbe. Im reflektierten Strahlengang, der an Detektor F detektiert wird, tritt, für die präparierten Zustände $|45^\circ\rangle$ und $|-45^\circ\rangle$, an Polarisationsfilter 3

Transmission bei entgegengesetzter Einstellung und Absorption bei gleicher Einstellung, wie am Präparator, auf.

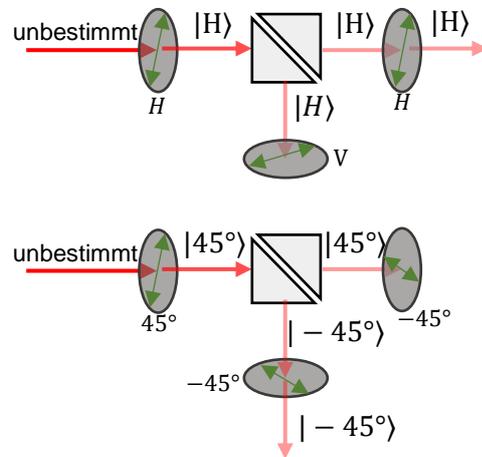


Abbildung 18: Wiederholte Messung des Polarisations-Zustands hinter einem Strahlteiler

Dies liegt daran, dass bei Spiegelungen aus dem Polarisations-Zustand $|\alpha\rangle$ der Polarisations-Zustand $|\alpha\rangle$ wird. Dabei gilt: $|H\rangle = |-H\rangle$, $|V\rangle = |-V\rangle$, $|-45^\circ\rangle = |45^\circ + 90^\circ\rangle$ und $|45^\circ\rangle = |-45^\circ + 90^\circ\rangle$.

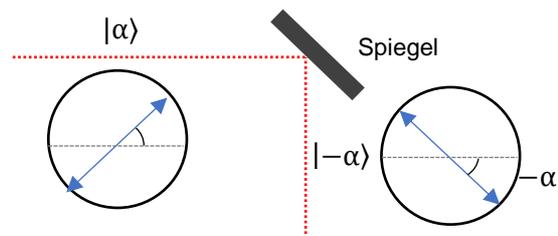


Abbildung 19: Änderung des Polarisations-zustands bei einer Reflexion

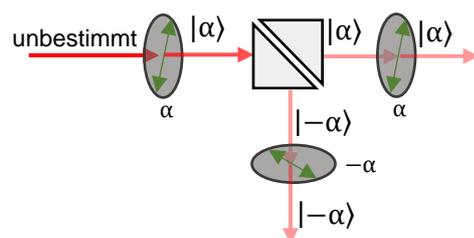


Abbildung 20: Polarisations-Zustände in Versuch 4 für beliebige Winkel

3.3 Die Fähigkeit zur Interferenz

3. Wesenszug: Die Fähigkeit zur Interferenz

Einzelne Quantenobjekte können mit sich selbst interferieren, wenn es mehr als eine klassische Möglichkeit gibt ein Messergebnis zu erhalten.

Mit den Experimenten an Strahlteilern konnte gezeigt werden, dass Quantenobjekte als kleinste Energiepakete nicht zerlegt werden können und, dass der Ausgang von Experimenten mit einzelnen Quantenobjekten dem Zufall unterliegt. Bei Photonen als Lichtquanten stellt sich nun die Frage, wie dies mit den bisherigen klassischen Vorstellungen von Licht verbunden werden kann. Klassisch wurde Licht als elektromagnetische Welle beschrieben. Licht hat bei der Überlagerung mehrerer Lichtwellen die Fähigkeit zur Interferenz. Es stellt sich daher die Frage, ob und wie sich diese Eigenschaft auch bei Quantenobjekten, insbesondere bei Photonen bemerkbar macht.

Interferenz kann zum Beispiel in Interferometern und Experimenten am Doppelspalt oder Gitter beobachtet werden. In einem Mach-Zehnder-Interferometer wird einfallendes Licht an einem ersten Strahlteiler aufgeteilt und an einem zweiten wieder überlagert (Abbildung 21). Zusätzlich befinden sich in den beiden möglichen Wegen Glaskeile.

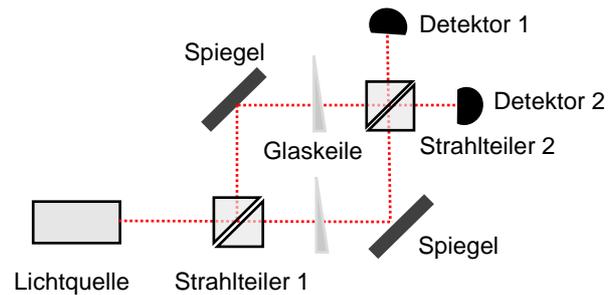


Abbildung 21: Schematischer Aufbau eines Mach-Zehnder-Interferometers mit Glaskeilen

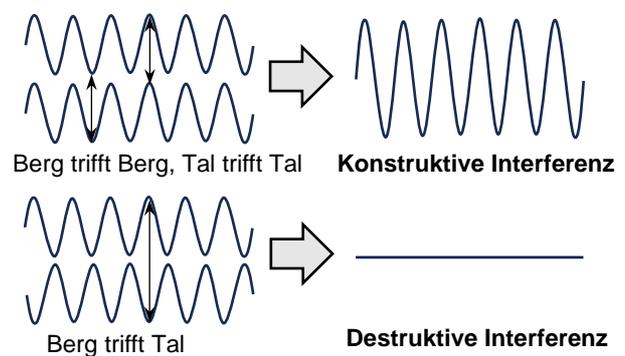


Abbildung 22: Konstruktive und destruktive Interferenz

Da die Lichtgeschwindigkeit in Glas geringer als in Luft ist, führt eine dickere Glasschicht zu einer längeren Laufzeit des Lichts und der Photonen. So entstehen Laufzeitunterschiede zwischen den verschiedenen Wegen zwischen den Strahlteilern, je nachdem wie dick die Glasschichten in den beiden Wegen sind (Abbildung 23). Mit den Glaskeilen kann die optische Weglänge variiert werden.

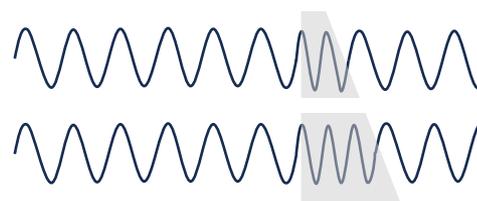


Abbildung 23: Laufzeitunterschiede am Glaskeil

Durch die Glaskeile wird zwischen den beiden Wellen die Phase verschoben. Die Phase gibt an, in welcher Position die Welle gerade ist. Eine Welle schwingt abwechselnd nach oben und unten. Es handelt sich um einen sich immer wiederholenden Prozess. Daher kann dies als Phase an einem Kreis dargestellt werden. Einer Position der Welle wird ein Winkel zugeordnet:

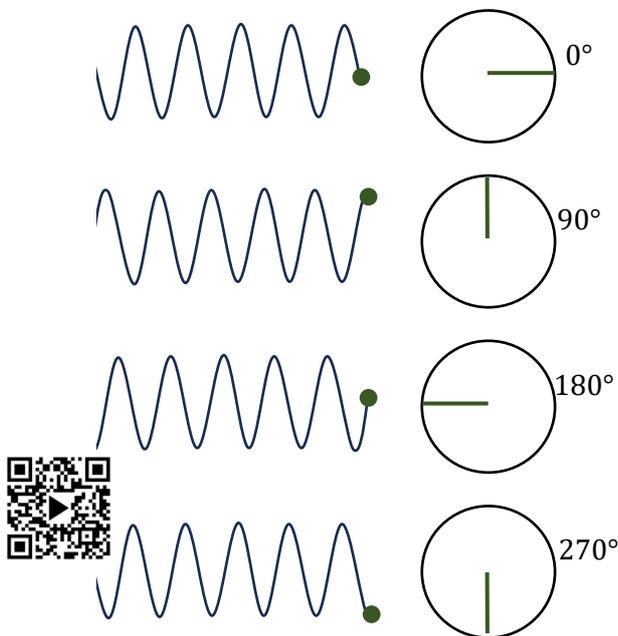


Abbildung 24: Die Phase einer Welle

Werden nun die Glaskeile verwendet verschieben diese die Phasen der Wellen. Die Phasen ändert sich auch in Glas mit der gleichen Geschwindigkeit, allerdings ist der Ort, an dem diese zu einem bestimmten Zeitpunkt ist, je nach Einstellung des Glaskeils eine andere.

Durch den Einsatz von Glaskeilen ist es nicht notwendig die Spiegel zu

bewegen, um Wegunterschiede zu variieren und die Interferenz zu untersuchen.

Da einzelne Quantenobjekte nicht aufgeteilt werden können, ist es für diese, in Abgrenzung zur klassischen Interferenz von Wellen, nicht sinnvoll von einer Aufteilung und Überlagerung zu sprechen. Stattdessen werden die verschiedenen klassisch möglichen Wege benannt, die es gibt, dass ein Photon an einem Detektor detektiert wird:

„Um ein Photon an Detektor 1 zu detektieren, gibt es die Möglichkeit, dass dieses von beiden Strahlteilern transmittiert, oder von beiden Strahlteilern reflektiert wird.“ Als Zustand lässt sich dies wie folgt schreiben: $|TT + RR\rangle$.

„Um ein Photon an Detektor 2 zu detektieren, gibt es die Möglichkeit, dass dieses von jeweils einem Strahlteiler transmittiert und einem Strahlteiler reflektiert wird.“ Als Zustand lässt sich dies wie folgt schreiben: $|RT + TR\rangle$.

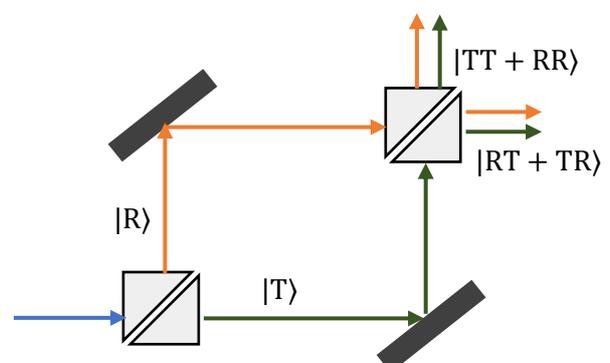
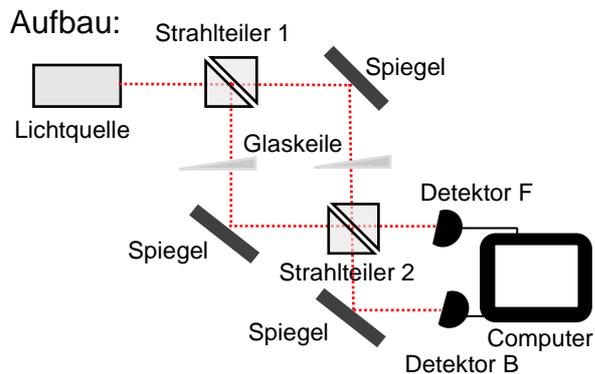


Abbildung 25: Mögliche Wege im Interferometer

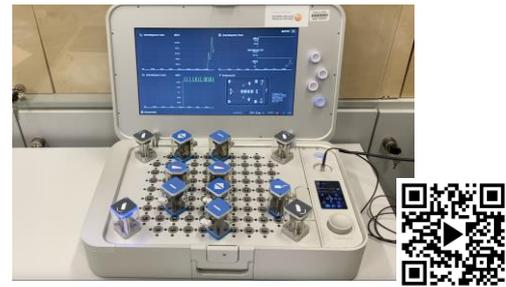
Versuch 5: Einzelphotonen im Mach-Zehnder-Interferometer



Der Versuch wird mit verschiedenen Lichtquellen durchgeführt. Zunächst wird er mit einem sichtbaren Laser durchgeführt. Dabei wird ein Detektor durch ein Blatt Papier ersetzt, um das Licht, welches sonst vom Detektor gemessen wird, sehen zu können. Dann wird der Detektor wieder eingesetzt und die Zählrate gemessen. Im Anschluss wird die angekündigte Photonenquelle ohne Ankündigung verwendet.

Das von den Lichtquellen ausgesendete Licht wird in ein Mach-Zehnder-Interferometer geschickt. An den Ausgängen des Interferometers wird das einfallende Licht (die Photonen) detektiert und als Zählrate ausgegeben. Mit Hilfe der Glasseile wird die optische Weglänge in den beiden Strahlengängen des Interferometers variiert.

(Auf die Ankündigung der Photonen wird hier verzichtet. Stattdessen wird, da bekannt ist, dass Licht aus Photonen besteht, die höhere Zählrate ohne Ankündigung verwendet.)



Video: Versuch 5

Bei der Verwendung des sichtbaren Lasers zeigt sich auf dem Blatt Papier ein Kreis, welcher abwechselnd hell und dunkel wird, während ein Glaskeil verfahren wird, sodass sich die Dicke des Glaskeils, die vom Licht durchlaufen wird, verändert. Es tritt Interferenz auf. In den Zählraten zeigt sich dies in Form einer wellenförmig abwechselnd maximalen und minimalen Zählrate. Die Zählraten an den beiden Detektoren sind so verschoben, dass die Maxima an dem einen Detektor gleichzeitig mit den Minima am anderen Detektor auftreten.

Auch bei der Verwendung der Photonenquelle zeigen sich wellenförmige Interferenzmuster, bei denen Minima und Maxima an den beiden Detektoren entgegengesetzt auftreten (Abbildung 26). Für einzelne Photonen ist das Interferenzmuster allerdings räumlich begrenzt. Die Auslenkung der Minima und Maxima nimmt mit größeren Laufzeitunterschieden stark ab, sodass das Interferenzmuster auf einen kleinen Bereich begrenzt ist.

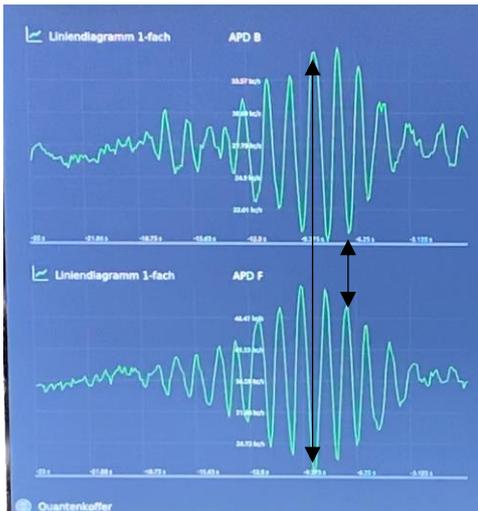


Abbildung 26: Interferenz von Photonen im Mach-Zehnder-Interferometer

Es zeigt sich, dass Quantenobjekte und insbesondere Photonen die Fähigkeit haben mit sich selbst zu interferieren. Daraus folgt, dass Photonen keine bestimmten klassischen Wege gehen. Der Zustand eines Photons am Strahlteiler reflektiert $|R\rangle$, oder transmittiert $|T\rangle$ ist zunächst unbestimmt und wird erst mit der Detektion am Detektor gemessen. Wenn der Zustand am Strahlteiler festgelegt würde, könnte es nicht zu einer Überlagerung von Zuständen kommen, die für das Auftreten des Interferenzmusters notwendig ist.

„Wenn es mehrere ununterscheidbare klassische Wege gibt, die zu einem Messergebnis führen, realisiert das Quantenobjekt keinen dieser Wege. Photonen nehmen keine Wege.“

„Es ist objektiv unbestimmt, auf welchem Weg ein Photon zum Detektor gelangt.“

Vielmehr beeinflussen die unterschiedlichen Möglichkeiten im Aufbau, zu demselben Messergebnis zu gelangen, die Wahrscheinlichkeit für die Messung dessen. Dies spiegelt sich in der Detektion des Interferenzmusters wider, während der Ort des Photons vor der Detektion unbestimmt ist.

Dieser Wesenszug hat große Auswirkungen auf die Beschreibung von Quantenobjekten. Während es zuvor ausreichte, einzelne Wahrscheinlichkeiten für das Verhalten an optischen Bauteilen anzugeben und gegebenenfalls zu multiplizieren, bedeutet diese Fähigkeit zu Interferenz, dass sich Wahrscheinlichkeiten in Form von Interferenz überlagern können. Dies wird in der theoretischen Beschreibung so gelöst, dass die Wahrscheinlichkeit für die Detektion bestimmter Zustände durch das Betragsquadrat einer Wellenfunktion ψ angegeben wird.

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$$

Wellen haben die Möglichkeit zu interferieren, wodurch die Interferenz einzelner Quantenobjekte, wie zum Beispiel von Photonen am Strahlteiler mit Hilfe der Wellenfunktion beschrieben werden kann. Da die Wellenfunktion im allgemeinen sämtliche Eigenschaften der Quantenobjekte beschreibt, kann diese nicht mit einfachen Mitteln berechnet werden, um die Wahrscheinlichkeiten

für den Ausgang eines Experimentes anzugeben. Soll durch die Wellenfunktion nur die Wahrscheinlichkeit, ein Quantenobjekt zu einer festen Zeit an einem bestimmten Ort zu detektieren, beschrieben werden, ähnelt die Wellenfunktion dem Interferenzmuster aus Versuch 5:

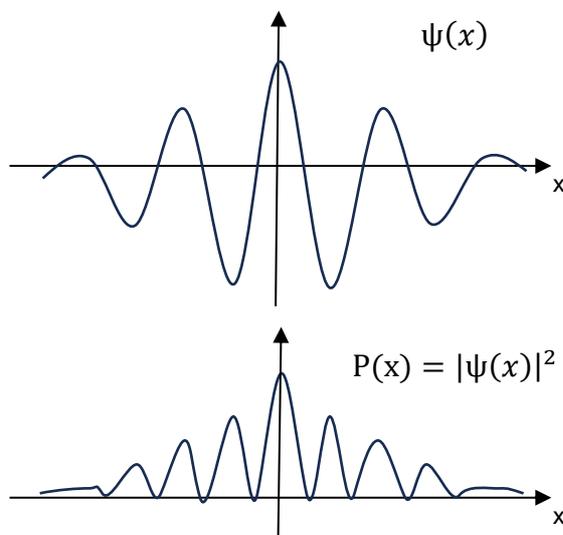


Abbildung 27: Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeit

Im Interferometer wird die Wellenfunktion am ersten Strahlteiler aufgeteilt und am zweiten wieder überlagert, woraus sich Wahrscheinlichkeiten zur Detektion ergeben. An dieser Stelle wird deutlich, dass die Vorstellung von Photonen als eine Art Teilchen, wie es der Lichtquantenhypothese entspricht nicht weitergeführt werden kann, sondern angepasst werden muss. Teilchen könnten sich nicht aufteilen und nicht interferieren. Gleichzeitig werden Photonen als Energieportionen emittiert und detektiert.

Dies ließe sich in einer Abbildung wie folgt darstellen: Bei der Emission und Detektion werden Photonen wie Teilchen betrachtet, während ihr Verhalten dazwischen durch Wellenfunktionen beschrieben wird, die die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Messergebnisse beschreiben.

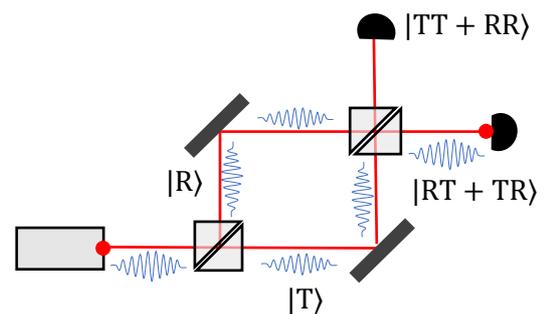


Abbildung 28: Wellenfunktion im Mach-Zehnder-Interferometer

Das Photon: Zweite Modellvorstellung

Ein Photon ist die kleinste, unteilbare Energieportion von Licht, die nur als Ganzes detektiert werden kann. Photonen werden auch als Lichtquanten bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeiten für die Messung der Photonen in einem bestimmten Zustand werden durch eine Wellenfunktion ψ beschrieben, da die Wahrscheinlichkeiten interferieren können: $P = |\psi|^2$.



Achtung!: Photonen sind weder Wellen noch Teilchen, aber in Kombination kann dieses Modell das Verhalten von Photonen gut wiedergeben.

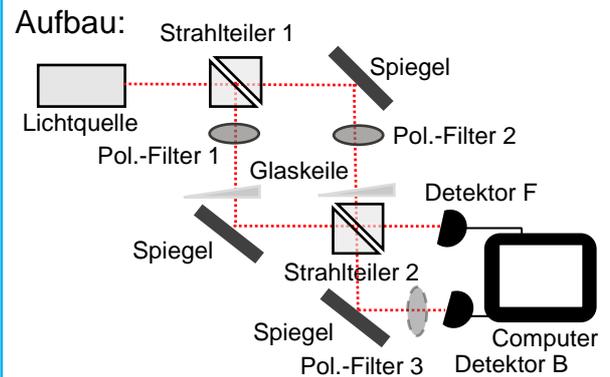
3.4 Die Komplementarität

4. Wesenszug: Die Komplementarität

Die Beobachtung einer Interferenz und die Unterscheidbarkeit klassischer Wege, die zu demselben Messergebnis führen, schließen sich gegenseitig aus.

Am Mach-Zehnder-Interferometer kann beobachtet werden, dass bei einzelnen Photonen im Interferometer, mit mehreren ununterscheidbaren klassischen Wegen zu den Detektoren Interferenz auftritt. Nun soll betrachtet werden, welchen Einfluss die Ununterscheidbarkeit der klassischen Wege auf die Interferenz hat. Zur Unterscheidbarkeit wird der bereits in Versuch 3 und 4 verwendete Polarisations-Zustand genutzt. Wenn die Polarisationsfilter in den Winkeln α und $\alpha + 90^\circ$ eingestellt sind, ist eindeutig unterscheidbar durch welchen ein Photon gekommen ist, an welchem es präpariert wurde. Bei der Analyse mit einem dritten Polarisationsfilter würden bei der Einstellung α die Photonen im Zustand $|\alpha\rangle$ transmittiert und die im Zustand $|\alpha + 90^\circ\rangle$ absorbiert, während es bei einer Einstellung des analysierenden Polarisationsfilters von $\alpha + 90^\circ$ zum entgegengesetzten Verhalten kommen würde. Eine Einstellung von $\alpha + 45^\circ$ oder $\alpha - 45^\circ$ hingegen, würde für beide Einstellungen die Hälfte der Photonen durchlassen und kann die Unterscheidbarkeit wieder aufheben.

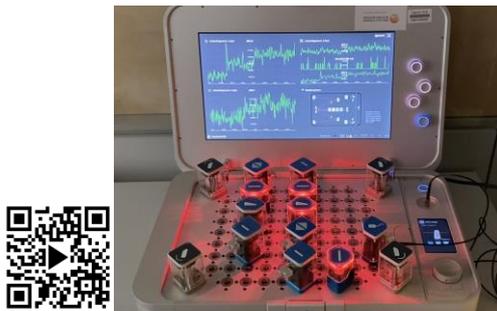
Versuch 6: Einfluss der Welcher-Weg-Information



Die angekündigte Photonenquelle sendet Photonen, die sich im Polarisationszustand $|V\rangle$ (vertikal) befinden aus. Im Strahlengang befindet sich ein Mach-Zehnder-Interferometer, bei dem in die verschiedenen klassischen Wege jeweils ein Polarisationsfilter eingesetzt ist. An den Ausgängen des Interferometers werden die ankommenden Photonen detektiert und als Zählrate ausgegeben. Vor Detektor B wird ausschließlich für die letzte Messung ein dritter Polarisationsfilter eingesetzt. Mit Hilfe der Glaskeile wird die optische Weglänge in den beiden Strahlengängen des Interferometers variiert, um das Auftreten eines Interferenzmusters zu untersuchen. Die Kombinationen für die Einstellungen der verschiedenen Polarisationsfilter kann Tabelle 1 entnommen werden. (Auf die Ankündigung der Photonen wird hier verzichtet. Stattdessen wird, da bekannt ist, dass Licht aus Photonen besteht, die höhere Zählrate ohne Ankündigung verwendet.)

Pol.-Filter 1	Pol.-Filter 2	Pol.-Filter 3
V bzw. 90°	V bzw. 90°	-
45°	45°	-
45°	-45°	-
45°	-45°	H bzw. 0°

Tabelle 1: Einstellungen der Polarisationsfilter in Versuch 5



Video: Versuch 6

Es zeigen sich, bei gleicher Einstellung der Polarisationsfilter in den beiden klassischen Wegen im Interferometer, Interferenzmuster an beiden Detektoren. Dabei sind die Zählraten für den Fall, dass der Zustand $|45^\circ\rangle$ gemessen wird in etwa halb so groß wie bei der Messung des Zustands $|V\rangle$, was durch den von der Quelle erzeugten Polarisations-Zustand zu erklären ist. Wenn sich die Einstellungen der Polarisationsfilter um 90° unterscheiden, ist kein ausgeprägtes Interferenzmuster mehr zu beobachten. Da Rückstände eines Interferenzmusters sichtbar bleiben, kann ausgeschlossen werden, dass das Ausbleiben der Interferenz durch einen Stillstand der Glaskeile hervorgerufen wird. Die Wellenfunktionen scheinen nicht interferieren zu können. Wird der dritte Polarisationsfilter

eingesetzt, der zu den Einstellungen der Polarisationsfilter im Interferometer um 45° verdreht ist, wird erneut ein ausgeprägtes Interferenzmuster an Detektor B beobachtet, während am Detektor F weiterhin kein Interferenzmuster zu sehen ist. Bei diesem Interferenzmuster sind die Zählraten erneut halbiert, da nur die Hälfte der Photonen am dritten Polfilter transmittiert wird.

„Wenn die klassischen Wege im Interferometer unterscheidbar sind, liegt eine Welcher-Weg-Information vor. Wenn eine Welcher-Weg-Information vorliegt, wird kein Interferenzmuster beobachtet. Wenn ein Quantenradierer die Welcher-Weg-Information ausradiert, kann erneut Interferenz beobachtet werden.“

In Versuch 6 wirkt Polarisationsfilter 3 als Quantenradierer, indem er die Unterscheidbarkeit im Polarisations-Zustand ausradiert.

Dieser Versuch zeigt erneut, dass Photonen keine Wege nehmen, sondern für diese nur Wahrscheinlichkeiten angegeben werden können. Photonen werden nicht transmittiert oder reflektiert und bekommen dann eine eindeutige Information, die sich von der Information im anderen Weg unterscheidet. Stattdessen gibt es die Möglichkeiten, dass ein Photon reflektiert oder transmittiert werden könnte und in den verschiedenen Wegen unterschiedliche

Informationen bekommen würde, wodurch bei der Überlagerung der Wellenfunktionen für Transmission und Reflexion keine Interferenzmuster entstehen.

Dadurch kann die mögliche Information wieder aufgehoben „ausradiert“ werden. Dies wird in Abbildung 26 veranschaulicht.

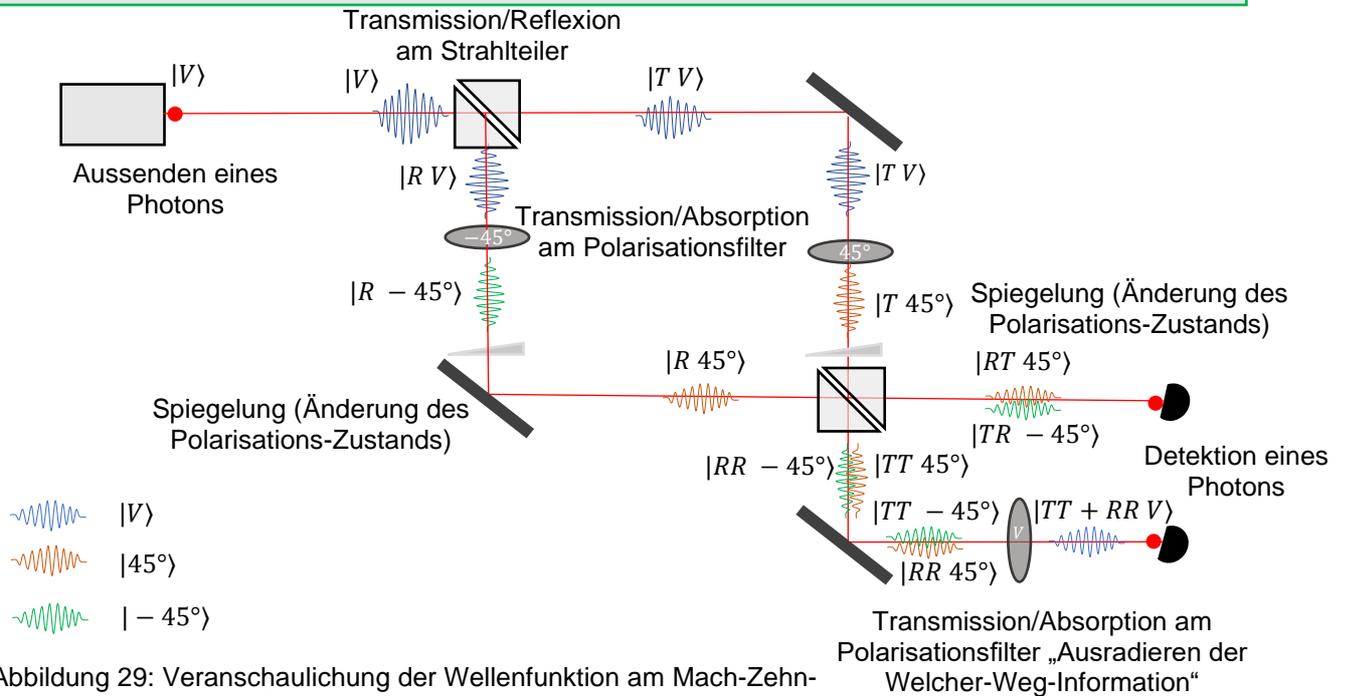


Abbildung 29: Veranschaulichung der Wellenfunktion am Mach-Zehnder-Interferometer mit Polarisationsfiltern

3.5 Die Verschränkung

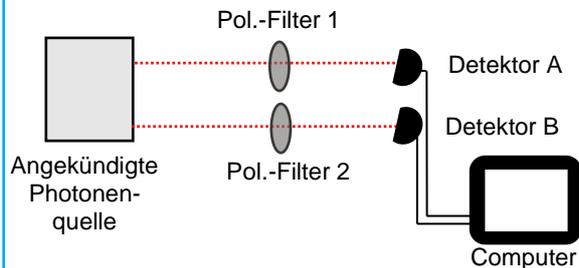
5. Wesenszug: Die Verschränkung
 Paare bzw. Mehrteilchensysteme von Quantenobjekten können verschränkt sein. Eine Messung an einem Quantenobjekt bestimmt instantan die Eigenschaft eines anderen Quantenobjektes.

Wenn anstelle von einzelnen Quantenobjekte mehrere Quantenobjekte betrachtet werden, ist es möglich, dass diese nur durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben werden können. In manchen Fällen können mehrere Quantenobjekte nicht getrennt voneinander beschrieben werden. Solche Zustände, bei denen mehrere Quantenobjekte nur gemeinsam beschreiben

werden können, werden als verschränkte Zustände bezeichnet. Liegt ein Paar von Quantenobjekten in einem verschränkten Zustand vor, bestimmt die Messung an einem Quantenobjekt instantan (gleichzeitig) den Zustand, in dem sich das andere Quantenobjekt befindet. Eine Messung eines Quantenobjektes kann den Zustand eines anderen Quantenobjektes in großer Entfernung verändern. Einstein bezeichnete dies als „magische Fernwirkung“. In Versuch 7 wird untersucht, wie sich dieser Wesenszug zum Beispiel in Experimenten mit Photonenpaaren zeigt, die in ihrem Polarisationszustand verschränkt sind.

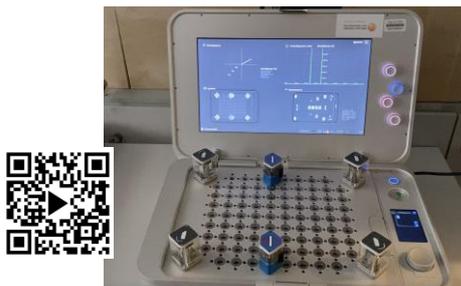
Versuch 7: Verschränkung von Photonen in deren Polarisation

Aufbau:



Eine angekündigte Photonenquelle, die in der Polarisation verschränkte Photonenpaare erzeugt, sendet aus zwei Ausgängen Photonen aus, wobei die Photonen eines Paares an verschiedenen Ausgängen ausgesendet werden. Hinter den beiden Ausgängen befindet sich jeweils ein Polarisationsfilter. Polarisationsfilter 2 wird in Rotation versetzt, während an Polarisationsfilter 1 nacheinander mit den Einstellungen V, 45°, H und -45° gemessen wird. Die Photonen werden an den Detektoren A und B detektiert. Das Signal wird durch einen Computer verarbeitet und die gleichzeitigen Ereignisse (innerhalb eines Koinzidenzfensters $\tau = 1ns$) an den Detektoren werden als Koinzidenzen ausgegeben.

Wenn in dem einen Strahlengang an Polarisationsfilter 1 in einem festen Winkel der Polarisations-Zustand gemessen wird, zeigt sich bei der Zahl der Koinzidenzen, in Abhängigkeit von der Einstellung von Polarisationsfilter 2, ein ähnliches Bild wie in Versuch 2, als mehrere Polarisationsfilter in einen Strahlengang gesetzt wurden. Es ergibt sich im Polardiagramm eine „8“, die in Richtung der Einstellung von Polarisationsfilter 1 ausgerichtet ist. An Polarisationsfilter 1 kann also der Polarisations-Zustand des einen Photons eines Paares gemessen werden, wodurch gleichzeitig der des zweiten Photons, welches an Polarisationsfilter 2 detektiert wird, präpariert wird. Dieses befindet sich nach der Messung des ersten Photons, ohne das an ihm selbst etwas gemessen wird in demselben Polarisations-Zustand. Das Einsetzen eines weiteren Polarisationsfilters hinter den Filtern 1 und 2 würde nur die maximale Zählrate verändern, die bei der Analyse mit Polarisationsfilter 2 erreicht wird.



Video: Versuch 7

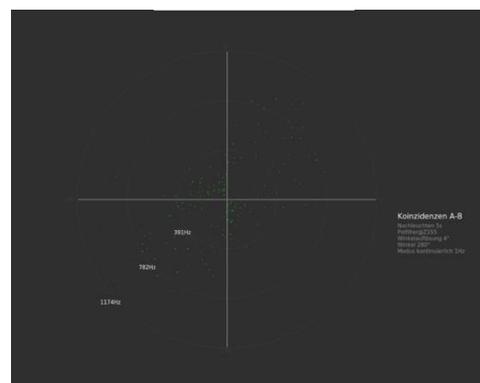


Abbildung 30: Polardiagramm bei der Messung in Versuch 6 (Pol.-Filter 1: 45°)

Die Ausrichtung der „8“ wird weiterhin durch die Einstellung von Polarisationsfilter 1 bestimmt. Dies zeigt, dass die Photonenpaare bis zur Messung in einem verschränkten Zustand sind und ab der Messung an Polarisationsfilter 1 getrennt voneinander beschrieben werden können.

„Bis zu einer Messung werden die verschränkten Photonenpaare durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben. Nach der Messung an Polarisationsfilter 1 können die Photonen durch einzelne Wellenfunktionen beschrieben werden.“

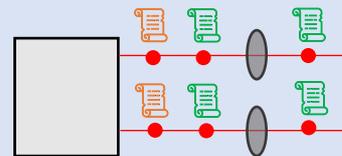
„Die erste Messung an einem Quantenobjekt eines verschränkten Paares bestimmt den Zustand des anderen Quantenobjektes. Danach sind diese unabhängig von einander.“

Die Grundlage für den Wesenszug der Verschränkung ist dabei bereits aus der klassischen Physik bekannt. So können zum Beispiel Erhaltungsgrößen, wie der Impuls und die Energie dazu führen, dass bei der Messung eines Ergebnisses an einem Quantenobjekt auch der Wert für das andere Quantenobjekt bestimmt wird. In der klassischen Physik gab es allerdings nicht die Möglichkeit, dass Eigenschaften zunächst unbestimmt sind und erst durch die Messung bestimmt werden. Daher gab es in der

klassischen Physik auch nicht eine solche Wirkung, die einer Informationsübertragung schneller als Lichtgeschwindigkeit entspricht.

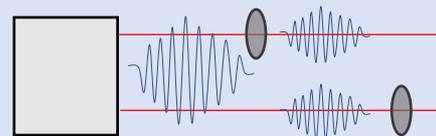
Da eine solche „Fernwirkung“, eine Wirkung die nicht *lokal* ist, nicht mit klassischen Vorstellungen vereinbar ist, gab es zwei Interpretationen.

Interpretation 1: Es gibt keine solche „Fernwirkung“, sondern das Verhalten ist vorherbestimmt. Die Quantenobjekte haben sogenannte „versteckte Parameter“, die das Verhalten dieser zum Beispiel am Polarisationsfilter bestimmen.



Photonen haben eine versteckte Information, die bestimmt, ob sie transmittiert werden.

Interpretation 2: Verschränkte Quantenobjekte können nur durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben werden. Die Physik kann nicht *lokal* beschrieben werden.



Bis zur Messung werden beide Photonen durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben.

Da diese Interpretationen grundlegende Unterschiede für das Verständnis der Physik haben, wurde untersucht, ob diese Theorien experimentell unterscheidbar sind. Dies ist durch die Betrachtung der Bell'schen Ungleichung möglich. Bell beschrieb 1964 zum ersten Mal eine Ungleichung, die nur für die erste Interpretation gültig ist. Eine vereinfachte Form der Bell'schen Ungleichung stellt die Form nach Wigner dar.

Für drei Eigenschaften: b, g, r , die erfüllt sein können, oder auch nicht: $\neg b, \neg g, \neg r$, gilt für die Wahrscheinlichkeiten, dafür dass Kombinationen von diesen erfüllt, oder nicht erfüllt sind:

$p(b, g) \leq p(b, r) + p(g, \neg r)$

„Die Wahrscheinlichkeit, dass b und g erfüllt sind, ist kleiner oder gleich der Wahrscheinlichkeit, dass b und r erfüllt sind, oder g und nicht r erfüllt sind.“

Dies erkennt man insbesondere, wenn man es wie in Abbildung 31 grafisch veranschaulicht. So sei zum Beispiel für Punkte im blauen Bereich Eigenschaft b erfüllt, für Punkte im gelben Bereich Eigenschaft g und für Punkte im roten Bereich Eigenschaft r . Die waagrecht schraffierte Fläche gibt an, dass die Eigenschaften b und g erfüllt sind und die

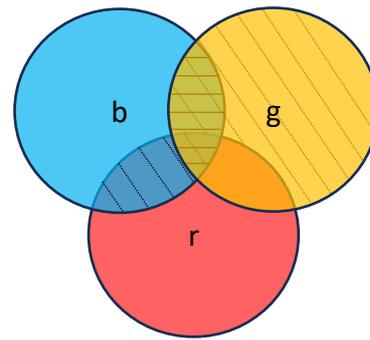


Abbildung 31: Verbildlichung der Bell'schen Ungleichung in der Wigner-Form

diagonal schraffierten Flächen geben die Kombinationen b, r und $g, \neg r$ an. Man erkennt, dass die waagrecht schraffierte Fläche vollständig in der diagonal schraffierten Fläche enthalten ist. Die ergibt sich auch rechnerisch.

$$p(b, g) = p(b, g, r) + p(b, g, \neg r)$$

$$p(b, r) = p(b, r, g) + p(b, r, \neg g)$$

$$p(g, \neg r) = p(g, \neg r, b) + p(g, \neg r, \neg b)$$

Wählt man als Eigenschaften die Transmission von Photonen für bestimmte Winkel, erhält man:

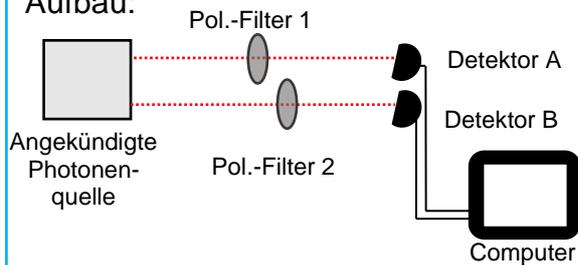
$$\cos^2(30^\circ) \leq \cos^2(60^\circ) + \sin^2(30^\circ)$$

$$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Die Ungleichung ist verletzt und dadurch kann Interpretation 1 nicht korrekt sein. Die Physik kann nicht lokal beschrieben werden.

Versuch 8: Die Bell'sche Ungleichung

Aufbau:



Eine angekündigte Photonenquelle sendet, in ihrem Polarisations-Zustand verschränkte, Photonenpaare aus. Es werden für die folgenden Winkelkombinationen der Polarisationsfilter die Zählraten gemessen:

Eigenschaften	b, g	b, r	$g, -r$
Pol.-Filter 1	30°	30°	60°
Pol.-Filter 2	60°	90°	0° ($\neg 90^\circ$)

Die Photonen werden an den Detektoren A und B detektiert. Das Signal wird durch einen Computer verarbeitet und die gleichzeitigen Ereignisse (innerhalb eines Koinzidenzfensters $\tau = 1ns$) an den Detektoren werden als Koinzidenzen ausgegeben.

Die Zählraten entsprechen Wahrscheinlichkeiten für die Eigenschaften:

b : Transmission bei 30°

g : Transmission bei 30°

r : Transmission bei 90°

Für die mittleren Zählraten ergibt sich:

$$n(30^\circ, 60^\circ) > n(30^\circ, 90^\circ) + n(60^\circ, 0^\circ)$$

$$345.000c/s > 80.000c/s + 210.000c/s$$

Das bedeutet, dass das Experiment die Bell'sche Ungleichung verletzt. Aufgrund der Schwankungen kann dieses Experiment die Verletzung der Bell'schen Ungleichung nicht eindeutig zeigen. Mit aufwändigeren Messungen und Berechnungen konnte die Verletzung der Bell'schen Ungleichung eindeutig nachgewiesen werden. Häufig wird die Verschränkung über den Polarisations-Zustand von Photonen gezeigt. Grundsätzlich muss eine Verschränkung allerdings nicht immer in dem Polarisations-Zustand bestehen. Es können andere Eigenschaften von Quantenobjekten verschränkt werden.



Video: Versuch 8

Die Wesenszüge der Quantenphysik zusammengefasst

1. Wesenszug: Die stochastische Vorhersagbarkeit

Einzelne Messergebnisse können in der Quantenphysik in der Regel nicht vorhergesagt werden. Es lassen sich jedoch Wahrscheinlichkeiten für den Ausgang eines Experiments angeben.

Für Photonen am Strahlteiler, oder Polarisationsfilter lassen sich Wahrscheinlichkeiten für die Transmission angeben. Für ein einzelnes kann aber nicht vorhergesagt werden, ob es transmittiert wird.

2. Wesenszug: Die Eindeutigkeit von Messergebnissen

Messungen zwingen Quantenobjekte einen eindeutigen Messwert anzunehmen, auch wenn diese vorher in einem Zustand waren, für den der Wert unbestimmt ist. Bei wiederholter Messung werden die Messwerte bestätigt.

Der Polarisations-Zustand eines Photons ist nach der Messung eindeutig bestimmt. Dies kann durch eine erneute Messung überprüft werden.

3. Wesenszug: Die Fähigkeit zur Interferenz

Einzelne Quantenobjekte können mit sich selbst interferieren, wenn es mehr als eine klassische Möglichkeit gibt ein Messergebnis zu erhalten.

Einzelne Photonen interferieren in einem Mach-Zehnder Interferometer mit sich selbst.

4. Wesenszug: Die Komplementarität

Die Beobachtung einer Interferenz und die Unterscheidbarkeit klassischer Wege, die zu demselben Messergebnis führen, schließen sich gegenseitig aus.

Werden Wege im Interferometer durch Polarisationsfilter unterscheidbar gemacht, tritt für Photonen keine Interferenz mehr auf.

6. Wesenszug: Die Verschränkung

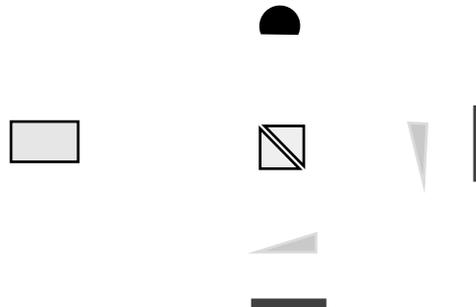
Paare bzw. Mehrteilchensysteme von Quantenobjekten können verschränkt sein. Eine Messung an einem Quantenobjekt bestimmt instantan die Eigenschaft eines anderen Quantenobjektes.

Zwei Photonen können in ihrem Polarisations-Zustand verschränkt sein. Die Messung an einem Photon bestimmt den Zustand des anderen. Die Bell'sche Ungleichung wird verletzt.

Aufgaben

Aufgabe 1:

Neben dem Mach-Zehnder Interferometer tritt für Licht als Welle auch an anderen Aufbauten Interferenz auf. Ein anderes Interferometer, in dem für Licht als Welle Interferenz beobachtet werden kann ist das Michelson Interferometer:



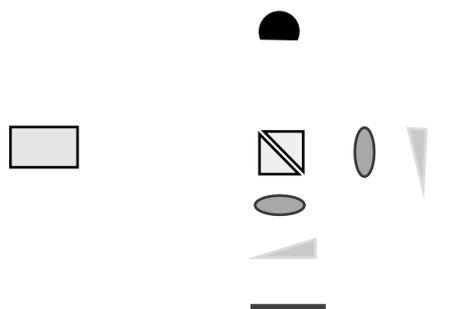
- Beschrifte den Aufbau zum Michelson Interferometer.
- Zeichne in Abbildung A die möglichen Wege klassischen Wege ein, entlang denen sich Licht ausbreiten kann.
- Benenne die Zustände, in denen sich ein Photon befinden würde, wenn es hinter den optischen Bauteilen detektiert würde.
- Entscheide begründet, ob für Einzelphotonen am Michelson-Interferometer Interferenz auftritt.

Lichtquelle, Detektor, Spiegel, Glaskeil, Strahlteiler

Aufgabe 2:

Eine Lichtquelle sendet Photonen im Polarisations-Zustand $|H\rangle$ aus, die durch ein Michelson Interferometer geschickt werden.

- Gib mögliche Einstellungen der Polarisationsfilter an, für die aufgrund der Komplementarität keine Interferenz auftritt.
- Beschreibe, wie durch den Einsatz eines dritten Polarisationsfilters wieder Interferenz auftreten kann und zeichne die Möglichkeit in die Abbildung ein.
- Beschrifte die Zustände, in denen sich ein Photon hinter den optischen Bauteilen befinden würde.
- Zeichne ein, an welchen Stellen die Photonen lokalisiert sind und an welchen Stellen nur Wahrscheinlichkeiten angegeben werden können, die durch eine Wellenfunktion beschrieben werden.



Die Wesenszüge der Quantenphysik für Elektronen

Die Wesenszüge der Quantenphysik beschreiben nicht nur das Verhalten von Photonen, sondern von allen Quantenobjekten. Die Wesenszüge zeigen sich daher auch in Experimenten mit Elektronen. An dieser Stelle betrachten wir ein Experiment mit Elektronen und untersuchen, inwiefern sich in diesem die Wesenszüge der Quantenphysik zeigen.

Experiment: Elektronen am Doppelspalt

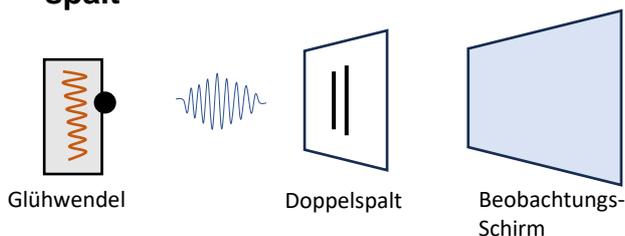


Abbildung 32: Elektronen am Doppelspalt

Es werden von einer Glühwendel Elektronen ausgesendet, deren Zustände als Quantenobjekt ab diesem Moment durch Wellenfunktionen beschrieben werden. Die Elektronen treffen auf einen Doppelspalt und werden hinter diesem an einem Beobachtungsschirm detektiert.

In dem Versuch zeigt sich, dass ein einzelnes Elektron, nur durch einen der Spalte geht, wenn an den Spalten gemessen wird, ob Elektronen durch diese hindurchgehen. Elektronen lassen sich nicht aufteilen.

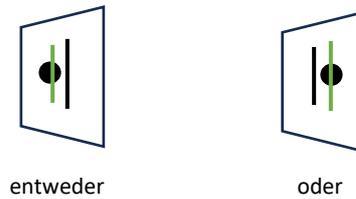


Abbildung 33: Unteilbarkeit von Elektronen am Doppelspalt

Wird dies nicht gemessen, kann auf dem Beobachtungsschirm ein Interferenzmuster beobachtet werden, wie es auch für Licht als Welle hinter einem Doppelspalt zu beobachten ist.

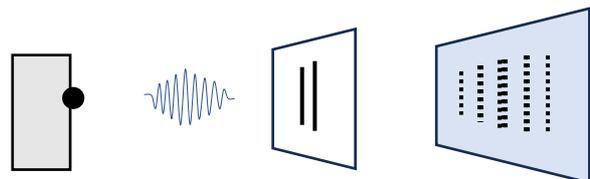


Abbildung 34: Interferenz von Elektronen am Doppelspalt

Dieses Interferenzmuster tritt nicht auf, wenn beobachtet wird, durch welchen Spalt die Elektronen kommen.

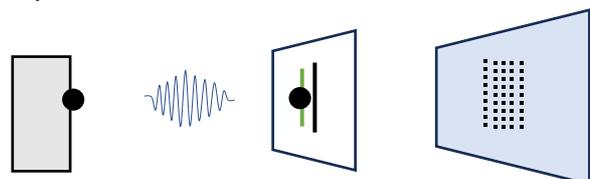


Abbildung 35: Keine Interferenz, wenn der Spalt gemessen wird

Aufgabe: Benenne welche Wesenszüge der Quantenphysik in diesem Versuch beobachtet werden können und beschreibe an welcher Stelle im Experiment diese beobachtet werden können.

4 Die Quantenkryptographie

Eine wichtige Anwendung der Quantenphysik liegt in der sogenannten Quantenkryptographie. Kryptographie beschäftigt sich grundsätzlich mit Verschlüsselungen. Ziel ist es möglichst sicher Daten austauschen zu können. Der sichere Datenaustausch spielt in einer digitalisierten Welt eine wichtige Rolle.

Die Quantenkryptographie bezeichnet den Teil der Kryptographie, der die Quantenphysik und deren Wesenszüge ausnutzt, um sichere Kommunikation zu ermöglichen. Durch die stochastische Vorhersagbarkeit, den Zufall in der Quantenphysik, ist es möglich zufällig generierte Schlüssel zu erstellen und diese abhörsicher zu übermitteln, sodass die eigentliche Nachricht, nachdem sie verschlüsselt wurde, bedenkenlos versendet werden kann.

Das BB84-Protokoll

Das bekannteste Protokoll, das einen sicheren Schlüsselaustausch ermöglicht, ist das BB84-Protokoll. Bei diesem versucht eine Absenderin Alice einen Schlüssel an einen Empfänger Bob zu senden, ohne dass dieser Schlüssel nicht abgehört werden kann, ohne dass der Angriff auffällt.

Ein Schlüssel ist grundsätzlich eine Abfolge von Nullen und Einsen, die zum Beispiel durch das Verhalten von Photonen am Strahlteiler zufällig bestimmt werden kann. Zur Präparation und Messung stehen Alice und Bob zwei verschiedene Messbasen zur Verfügung $(0,1)$ und $(0',1')$, in denen Alice präparieren und Bob analysieren kann. Diese können zum Beispiel in den Einstellungen (H, V) oder $(45^\circ, -45^\circ)$ von Polarisationsfiltern bestehen.

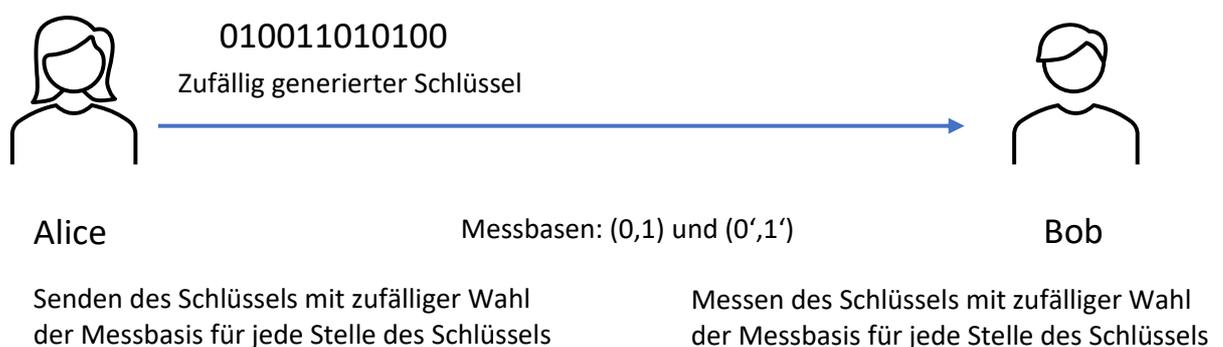


Abbildung 36: Ablauf des BB84-Protokolls

Das BB84-Protokoll gliedert sich in 6 Schritte:

Schritt 1: Alice erzeugt einen zufälligen Schlüssel (z.B. durch die Transmission oder Reflexion von Photonen am Strahlteiler).

Schritt 2: Alice erzeugt eine zufällige Reihenfolge für die Wahl der Messbasis (z.B. durch die Transmission oder Reflexion von Photonen am Strahlteiler).

Schritt 3: Bob erzeugt eine zufällige Reihenfolge für die Wahl der Messbasis (z.B. durch die Transmission oder Re-

flexion von Photonen am Strahlteiler).

Schritt 4: Alice sendet in der zufälligen Reihenfolge der Messbasen den zufälligen Schlüssel an Bob und der detektiert in seiner zufälligen Reihenfolge der Messbasen.

Schritt 5: Alice und Bob vergleichen einen Teil der gesendeten Informationen (bei der sie in der gleichen Basis gemessen haben).

Schritt 6: Alice sendet die eigentliche Nachricht verschlüsselt an Bob.

Die praktische Durchführung des BB84-Protokolls

Um zufällige Reihenfolgen, oder Schlüssel zu erzeugen kann das zufällige Verhalten von Photonen am Strahlteiler ausgenutzt werden: Reflexion entspricht dann einer 0 für den Schlüssel und der Messbasis (0,1) und Transmission einer 1 für den Schlüssel und der Messbasis (0',1'). Die Messbasen können als Messung des Polarisations-Zustandes umgesetzt werden. (0,1) entspricht der Messung in den Einstellungen (H,V) und (0', 1') der Messung in den Einstellungen (-45°,45°). Es werden wenige Photonen durch die Aufbauten in Abbildung 37 geschickt. Als Schlüssel und für die Reihenfolgen wird im linken Aufbau die Reihenfolge von reflektierten und transmittierten Photonen genommen. Bei dem Austausch des Schlüssels wird Polarisationsfilter 1 entsprechend der Stelle des Schlüssels in der zugehörigen Basis von Alice eingestellt, während Die Filter 2 und 3 entsprechend den beiden Möglichkeiten in der Basis von Bob eingestellt werden. Das erste detektierte Photon nach einschalten des Lasers wird als Messergebnis betrachtet.

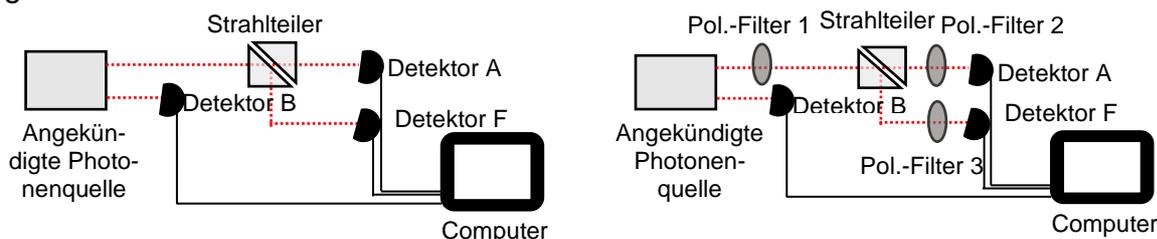


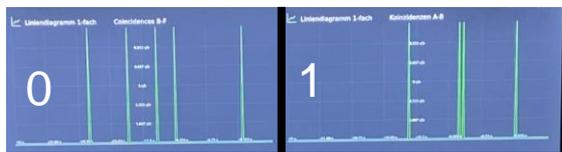
Abbildung 37: Aufbau zur Generierung von Zufallszahlen links und Aufbau zum Austausch des Schlüssels rechts

Die Durchführung des BB84-Protokolls kann in dem folgenden Video betrachtet werden:



Video: Das BB84-Protokoll

Schritt 1: Als Schlüssel ergibt sich:



Die ersten 6 Stellen des Schlüssels lauten:

011011

Schritt 2: Für die Messbasen von Alice ergibt sich:

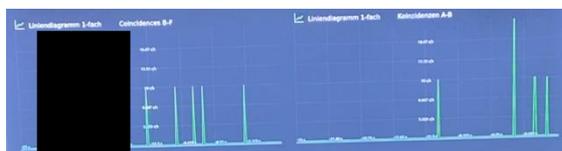


(H,V) (H,V) (45°, -45°) (H,V) (H,V) (45°, -45°)

Das heißt Alice sendet:

H V -45° H V -45°

Schritt 3: Für die Messbasen von Bob ergibt sich:



(H,V) (45°, -45°) (H,V) (H,V) (H,V) (45°, -45°)

Schritt 4: Alice sendet H V -45° H V -45° und Bob misst in den Basen aus Schritt 3.

Bob empfängt als Schlüssel: 001011

Schritt 5: An allen Stellen, an denen Alice und Bob in der gleichen Basis gemessen haben stimmt das Ergebnis überein.

An einer Stelle, an der sie in verschiedenen Basen gemessen haben unterscheidet sich der Schlüssel. Dies ist für Alice und Bob nicht schlimm, da diese nur die Ergebnisse als Schlüssel nutzen, bei denen die Basis gleich war.

Diese unterschiedliche Stelle zeigt allerdings, warum das Protokoll abhörsicher ist. Aus der Messung von Polarisations-Zuständen ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit das richtige Ergebnis in der falschen Basis zu erhalten 50% ist. Außerdem stimmen bei der zufälligen Wahl der Basen nur in 50% der Fälle die Basen überein. Ein Angreifer würde also in 50% der Fälle in einer anderen Basis messen als Alice und Bob. Wenn er nun in einer falschen Basis misst und seinen Messwert in der falschen Basis an Bob sendet misst dieser in 50% der Fälle ein anderes Ergebnis, als es von Alice losgesendet wurde. Das heißt in 25% (50%·50%) der Fälle würde bei gleicher Basis von Alice und Bob ein falsches Ergebnis herauskommen. Dies würden diese bei dem Vergleich in Schritt 5 bemerken.

5 Systematisierung und Mathematisierung - Das Verhalten von Quantenobjekten beschreiben

Nachdem die Wesenszüge der Quantenphysik nun qualitativ betrachtet wurden, ist das Ziel in diesem Abschnitt, diese mathematisch zu beschreiben, um auch quantitativ Vorhersagen für Detektionsereignisse treffen zu können. Bereits bei der Betrachtung der Wesenszüge wurde eingeführt, dass einem Quantenobjekt eine Wellenfunktion zugeordnet ist, deren Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeit für eine Detektion bei bestimmten Parametern angibt. Diese Wellenfunktion explizit zu bestimmen ist sehr aufwändig, sodass stattdessen die Veränderung von Wahrscheinlichkeiten durch bestimmte Bauteile im Experiment betrachtet wird, um die Wahrscheinlichkeit für verschiedene Ergebnisse angeben zu können. Dabei sind verschiedene Größen zu berücksichtigen, die sich aus den

Wesenszügen der Quantenphysik und den zugehörigen Experimenten ergeben (Tabelle 2).

In den Experimenten mit Photonen, anhand derer die Wesenszüge beobachtbar wurden, waren die wichtigsten Bauteile der Strahlteiler und der Polarisationsfilter.

An beiden Bauteilen tritt für ein einzelnes Photon eine Entweder-oder-Entscheidung auf. Ein Photon wird an einem Strahlteiler entweder transmittiert oder reflektiert und an einem Polarisationsfilter entweder transmittiert oder absorbiert. Wenn ein Photon auf ein solches Bauteil trifft, kann es sich anschließend in genau zwei Zuständen befinden.

Daher werden diese Systeme als Zwei-Zustand-Systeme bezeichnet.

Größe	Wesenszug	Funktion
Wahrscheinlichkeit	Stochastische Vorhersagbarkeit	Die Wahrscheinlichkeit soll richtig vorhergesagt werden können.
Phase der Wellenfunktion	Fähigkeit zur Interferenz	Der Phasenunterschied ist bei der Überlagerung von Wellen grundlegend für die Interferenz.
Polarisations-Zustand der Photonen	Komplementarität und Eindeutigkeit von Messergebnissen	Der Polarisations-Zustand ist eine Eigenschaft von Photonen, die gemessen werden kann und einen Einfluss auf das Auftreten eines Interferenzmusters hat.

Tabelle 2: Größen, die die Mathematisierung beeinflussen

5.1 Beschreibung des Strahlteilers

An einem Strahlteiler zeigen sich sowohl die Unteilbarkeit von Photonen als auch die Interferenz. Diese beiden Eigenschaften müssen durch die mathematische Beschreibung modelliert werden. Ein Strahlteiler besitzt zwei Eingänge und Ausgänge. Um den Schreibaufwand gering zu halten, wird das Verhalten von Photonen am Strahlteiler durch Zeilenvektoren mit zwei Einträgen beschrieben. In *Zeilenvektoren* werden die Einträge nebeneinander notiert. Die Betragsquadrate der Einträge geben dabei Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Zustands an.

Die Eingänge eines Strahlteilers werden durch einen *Input-Vektor* $(x \ y)$ beschrieben. Dieser gibt an, dass mit der Wahrscheinlichkeit $P_{In\ 1} = |x|^2$ ein Photon am ersten Eingang (In 1) auf den Strahlteiler trifft und mit der Wahrscheinlichkeit $P_{In\ 2} = |y|^2$ ein Photon am zweiten Eingang (In 2) auf den Strahlteiler trifft. Die Ausgänge des Strahl-

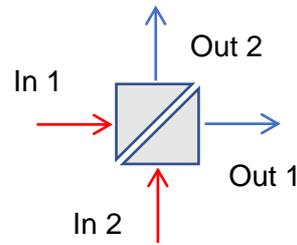
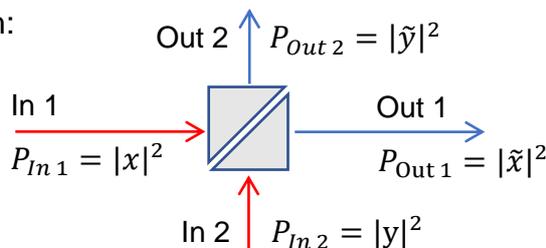


Abbildung: 38 Benennung der Ein- und Ausgänge am Strahlteiler

teilers werden durch einen *Output-Vektor* $(\tilde{x} \ \tilde{y})$ beschrieben. Dieser gibt an, dass mit der Wahrscheinlichkeit $P_{Out\ 1} = |\tilde{x}|^2$ ein Photon den Strahlteiler am Ausgang Out 1 verlässt und mit der Wahrscheinlichkeit $P_{Out\ 2} = |\tilde{y}|^2$ ein Photon den Strahlteiler am Ausgang Out 2 verlässt.

Der Strahlteiler entspricht also einer Rechenoperation, bei der aus dem *Input-Vektor* $(x \ y)$ der *Output-Vektor* $(\tilde{x} \ \tilde{y})$ entsteht. In der Mathematik geschieht dies, indem man eine *Matrix* mit dem *Input-Vektor* multipliziert und einen *Output-Vektor* erhält. In der Physik wird die Matrix auch als Operator bezeichnet.

Graphisch:



Mathematisch:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Input-Vektor Strahlteiler-Matrix Output-Vektor

Beispiel:

Der Input-Vektor $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Entspricht den Wahrscheinlichkeiten

$$P_{In\ 1} = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$P_{In\ 2} = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = \frac{3}{4}$$

Was ist eine Matrix? - Und wie rechnet man damit?

Eine Matrix ist eine Anordnung von Zahlen, die aussieht wie eine Mischung aus einem Vektor und einer Tabelle.

$$\text{Bsp.: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrizen gibt es mit unterschiedlichen Anzahlen von Zeilen und Spalten. Eine $m \times n$ -Matrix (gesprochen m-Kreuz-n-Matrix) hat m Zeilen und n Spalten.

Im obigen Beispiel gibt es jeweils 3 Zeilen und 3 Spalten. Es handelt sich also um eine 3 x 3-Matrix. Grundsätzlich gelten unabhängig von der Größe der Matrix immer die gleichen Rechenregeln. Zeilenvektoren können mit Matrizen multipliziert werden, indem die Einträge des Vektors mit den Einträgen der Spalten der Matrix multipliziert und aufsummiert werden:

Vektor-Matrix-Multiplikation:

$$(x \ y) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = (x \cdot a_1 + y \cdot a_2 \quad x \cdot b_1 + y \cdot b_2)$$

Bsp.:

$$(1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6) = (13 \ 16)$$



Man erkennt, dass für die Berechnung die Anzahl der Zeilen der Matrix der Anzahl der Einträge des Vektors entsprechen muss.

Bei der Vektor-Matrix-Multiplikation einer 2 x 2-Matrix mit einem Vektor mit 2 Einträgen ergibt sich erneut ein Vektor

mit 2 Einträgen. Auf eine ähnliche Art lassen sich auch zwei Matrizen miteinander multiplizieren, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix entspricht. Als Ergebnis ergibt sich erneut eine Matrix.

Matrix-Matrix-Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_2 & a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot d_2 \\ a_2 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 & a_2 \cdot d_1 + b_2 \cdot d_2 \end{pmatrix}$$

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$$

Übung: Berechne die folgenden Multiplikationen mit Matrizen.

i) $(2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} =$

iv) $\begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

ii) $(3 \ 7) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

v) $(1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

„Es wird ein Operator auf einen Zustand angewendet.“ Ist die physikalische Sprechweise für die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor, der einen Zustand beschreibt (Zustandsvektor).

Die Wahrscheinlichkeit, dass Photonen am Strahlteiler transmittiert, oder reflektiert werden, ist eine Eigenschaft des Strahlteilers. Sie wird durch den Transmissions- bzw. Reflexionskoeffizienten angegeben. Es gilt:

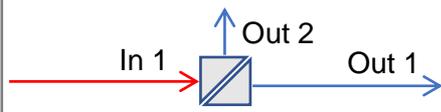
$$\begin{aligned}
 P_{trans} &= T^2 \\
 P_{ref} &= R^2 \\
 P_{trans} + P_{ref} &= T^2 + R^2 = 1,
 \end{aligned}$$

wobei T den Transmissionskoeffizienten und R den Reflexionskoeffizienten bezeichnet. Eine naheliegende Lösung, um die Wahrscheinlichkeiten hinter einem Strahlteiler zu berechnen, wäre die Multiplikation mit der Matrix:

$$S = \begin{pmatrix} T & R \\ R & T \end{pmatrix},$$

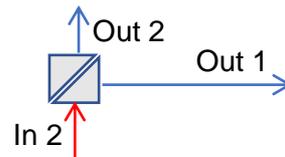
die die Wahrscheinlichkeit für die Transmission und Reflexion eines Photons, welches in Eingang 1 oder Eingang 2 ankommt, richtig beschreiben würde:

Photon kommt an In 1 an:



$$\begin{aligned}
 (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} T & R \\ R & T \end{pmatrix} &= (T \ R) \\
 P_{Out \ 1} &= P_{trans} = T^2 \\
 P_{Out \ 2} &= P_{ref} = R^2
 \end{aligned}$$

Photon kommt an In 2 an:



$$\begin{aligned}
 (0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} T & R \\ R & T \end{pmatrix} &= (R \ T) \\
 P_{Out \ 1} &= P_{ref} = R^2 \\
 P_{Out \ 2} &= P_{trans} = T^2
 \end{aligned}$$

Diese Matrix kann allerdings nicht die Fähigkeit zur Interferenz beschreiben, da sie einen Phasensprung am Strahlteiler nicht berücksichtigt, der für die Interferenz von Bedeutung ist.

Der Einfluss auf die Phase zeigt sich am Mach-Zehnder-Interferometer (Versuch 4). An beiden Detektoren kann bei Variation der optischen Weglänge durch Glaskeile ein Interferenzmuster beobachtet werden. Dabei erscheint ein Maximum an einem Detektor genau dann, wenn am anderen Detektor ein Minimum gemessen wird.

Wenn an den Strahlteilern keine Phasenverschiebungen zwischen reflektiertem und transmittiertem Strahl auftreten würden, würden Unterschiede in den Phasen der Wellen ausschließlich durch die Glaskeile bestimmt. Insbesondere müssten an beiden Detektoren gleichzeitig Maxima und Minima auftreten, sodass sich die gleichen Interferenzmuster an beiden Ausgängen des Interferometers finden lassen müssten.

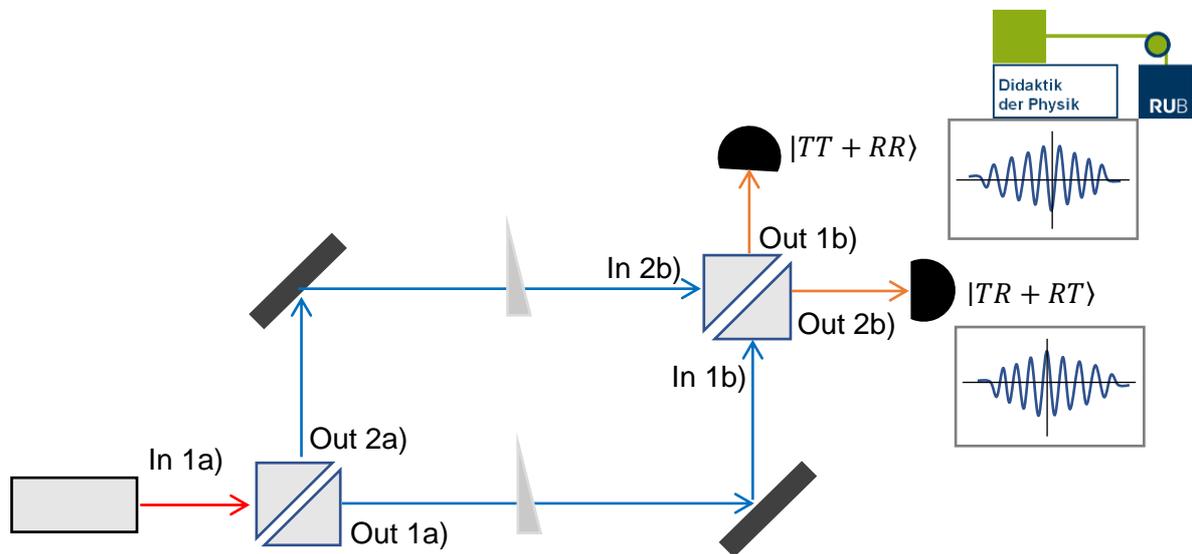


Abbildung 39: Mach-Zehnder-Interferometer mit Skizze der Zählraten

Bezeichne den Winkel α die Phasenverschiebung am Strahlteiler. Dann beträgt die Phasendifferenz zwischen den sich am zweiten Strahlteiler überlagernden Wellen, die durch die beiden Strahlteiler hervorgerufen wird, für den Ausgang $|TR + RT\rangle$, bei dem in beiden Möglichkeiten einmal Transmission und einmal Reflexion stattfindet, 0° und für den Ausgang $|TT + RR\rangle$ in dem die Möglichkeiten jeweils aus zweimal Transmission bzw. Reflexion bestehen $2 \cdot \alpha$. Da sich an den Detektoren die Maxima und Minima gegenüberliegen, muss gelten: $2 \cdot \alpha = 180^\circ$.

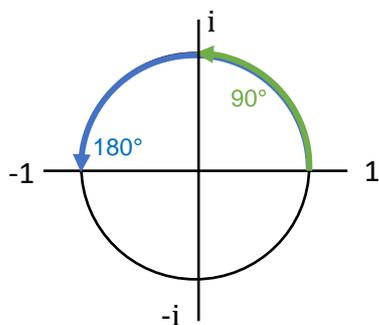
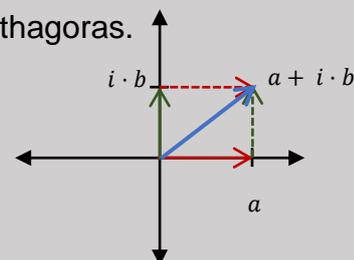


Abbildung 40: Skizze der Phasenverschiebung am Strahlteiler

Dem Winkel $\alpha = 90^\circ$ wird nun eine Zahl i zugeordnet. Da zweimalige Multiplikation einer Verschiebung um 180° also dem Wert -1 entspricht, ist $i = \sqrt{-1}$ mit $|i|=1$. Eine Phasenverschiebung um $\alpha = 90^\circ$ entspricht einer Multiplikation mit i .

Der Strahlteiler wird also durch eine Matrix $S = \begin{pmatrix} T & i \cdot R \\ i \cdot R & T \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei $i = \sqrt{-1}$ gilt.

Zahlen von der Form $a + i \cdot b$ nennt man komplexe Zahlen. An dieser Stelle ist nur wichtig, dass $i = \sqrt{-1}$ und $|a + i \cdot b|^2 = a^2 + b^2$. Komplexe Zahlen lassen sich zweidimensional darstellen. a und b geben dabei die Längen der Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck an. $|a + i \cdot b|^2$ ergibt sich dann mit dem Satz von Pythagoras.

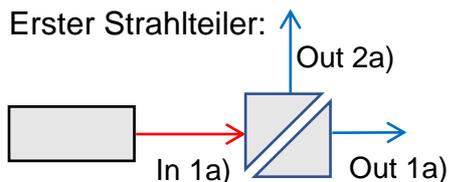


Berechnung der Wahrscheinlichkeiten im Mach-Zehnder Interferometer:

Die Strahlteiler im Mach-Zehnder-Interferometer sind 50/50-Strahlteiler. Für die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten gilt also: $T = R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, da $T^2 = R^2 = \frac{1}{2}$

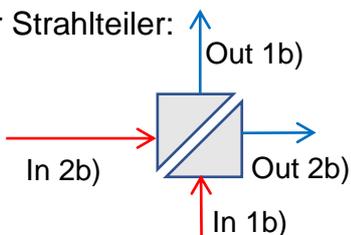
Das heißt $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ist die Strahlteiler-Matrix.

Erster Strahlteiler:



Input:	Strahlteiler-Matrix:	Output:
$(1 \ 0)$	$\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Zweiter Strahlteiler:



Input:	Strahlteiler-Matrix:	Output:
$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$= (0 \ i)$

Alternativ kann direkt der ganze Aufbau (siehe Abbildung 39) betrachtet werden:

Input:	Strahlteiler-Matrix 1:	Strahlteiler-Matrix 2:	Output:
$(1 \ 0)$	$\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$= ?$

Mach-Zehnder-Interferometer-Matrix

$(1 \ 0)$	\cdot	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$=$	$(0 \ i)$
-----------	---------	--	-----	-----------

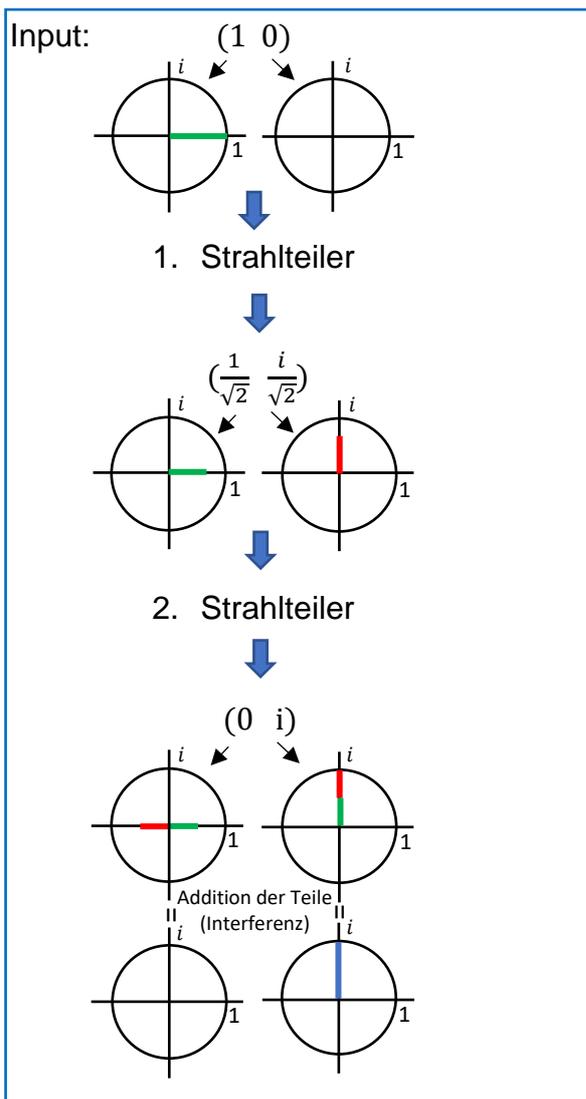
Es ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten:

$$P_{|TT+RR\rangle} = 0^2 = 0$$

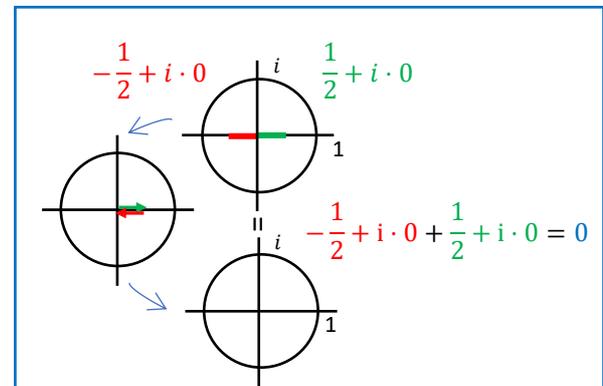
$$P_{|TR+RT\rangle} = |i|^2 = 1^2 = 1$$

Photonen, die durch das Mach-Zehnder Interferometer geschickt werden, werden immer an Ausgang Out 2b) detektiert, wenn die Glaskeile keine Weglängenunterschiede herbeiführen.

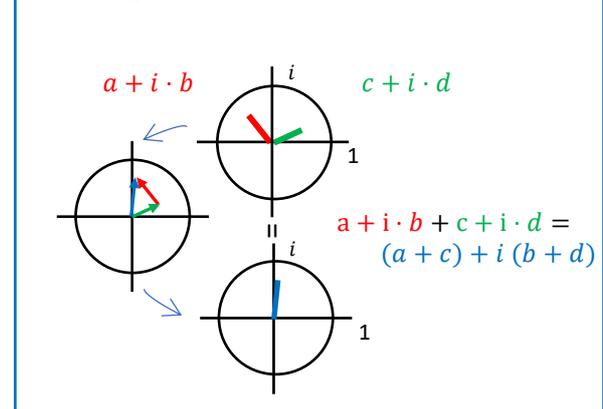
Zur Veranschaulichung können die Einträge der Vektoren auch gezeichnet werden. Dabei steht der Betrag der Zahl, also die Länge der Linie für die Wahrscheinlichkeit und die Richtung für die Phase der Wellenfunktion. Die Phase variiert in der Realität, je nachdem wo gemessen wird. Da nur die Phasendifferenz relevant ist, beeinflusst dies die Wahrscheinlichkeiten nicht. Diese zeichnerische Darstellung sieht für das Mach-Zehnder-Interferometer wie folgt aus:



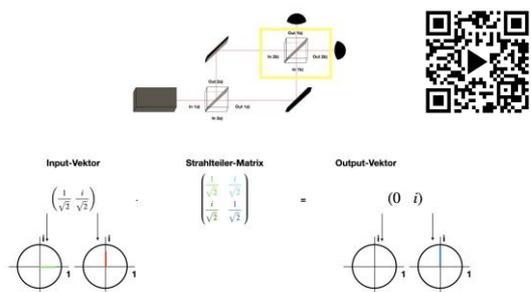
Im letzten Schritt bei der zeichnerischen Darstellung wird die Interferenz sichtbar. Die verschiedenen Möglichkeiten werden addiert, indem die Striche „aneinandergesetzt“ werden.



Oder allgemeiner:



Eine gemeinsame Darstellung der Rechnung und grafischen Unterstützung kann in der folgenden Animation betrachtet werden.



Animierte Rechnung und Verbildlichung zum Mach-Zehnder Interferometer

Durch die Verwendung der komplexen Zahlen, ist es möglich beliebige Phasenverschiebungen zu beschreiben. Dies ermöglicht es, auch die Glaskeile, die zu einer beliebigen Phasenverschiebung führen können, in Form einer Matrix, zu modellieren. Da die Schreibweise für beliebige Winkel schnell unübersichtlich wird, werden für den Glaskeil nur bestimmte Phasenverschiebungen modelliert.

Glaskeile wie sie im Mach-Zehnder-Interferometer eingesetzt werden, um die optische Weglänge zu variieren, ändern die Phase der Welle. Dadurch werden im Experiment abwechselnd Maxima und Minima detektiert. Bei der Definition von i wurde ausgenutzt, dass die Multiplikation mit einer komplexen Zahl auf dem Einheitskreis der Phasenverschiebung um den zugehörigen Winkel entspricht. Es ergeben sich die folgenden Spezialfälle:

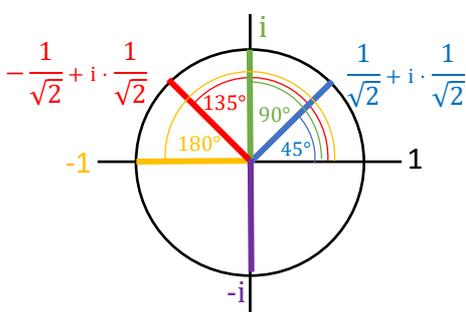


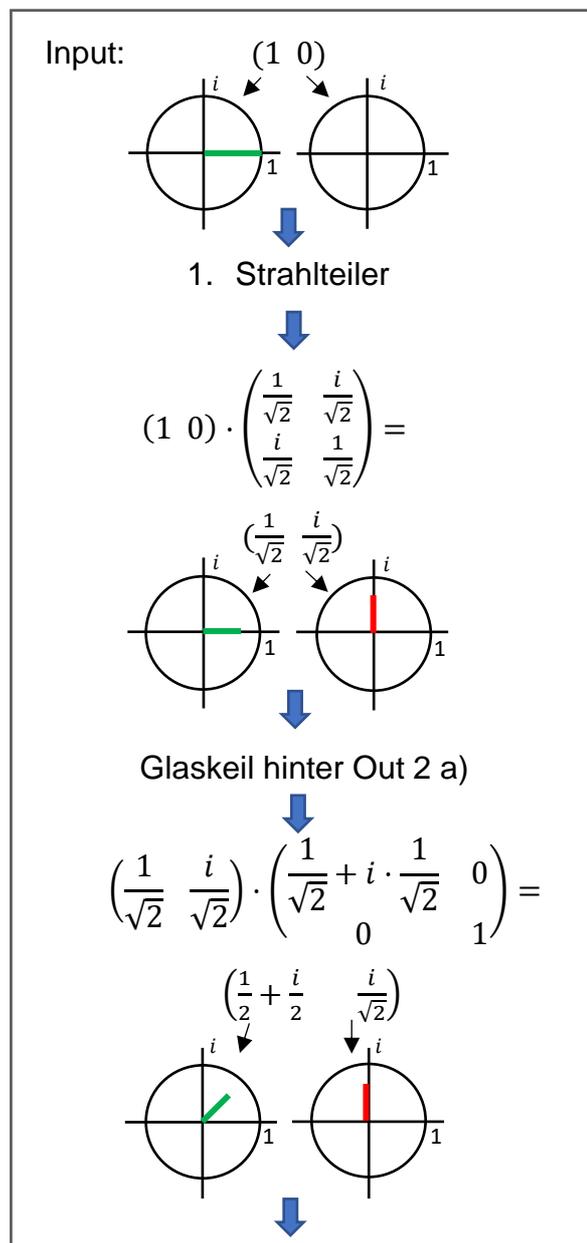
Abbildung 41: Phasenverschiebungen als komplexe Zahlen

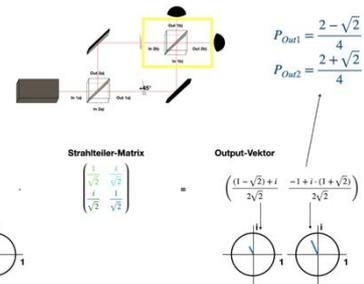
Eine Phasenverschiebung um den Winkel 45° am Glaskeil entspricht also zum Beispiel einer Matrix, die den

vorherigen Wert im entsprechenden Strahlengang mit der Zahl $\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ multipliziert und den anderen nicht verändert. Für den ersten Eintrag der Matrix wäre dies:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit einem solchen Glaskeil, der eine Phasenverschiebung um 45° hervorruft, ergeben sich die folgende Rechnung und Skizzen.





2. Strahlteiler

↓

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\sqrt{2})+i}{2\sqrt{2}} & \frac{-1+i \cdot (1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

↓ ↓

Aus der Berechnung ergibt sich für die Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P_{|TT+RR\rangle} &= \left| \frac{(1-\sqrt{2})+i}{2\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \frac{(1-\sqrt{2})^2 + 1^2}{8} \\ &= \frac{1 - 2 \cdot \sqrt{2} + 2 + 1}{8} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{|TR+RT\rangle} &= \left| \frac{-1+i \cdot (1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \\ &= \frac{1^2 + (1+\sqrt{2})^2}{8} \\ &= \frac{1 + 1 + 2 \cdot \sqrt{2} + 2}{8} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Animierte Rechnung und Verbildlichung

Wird $\alpha \gg 5 \cdot 360^\circ$ ist der Teil der Wellenfunktionen, der sich überlagert so gering, dass die Interferenz unerheblich wird. Für kleine Phasenunterschiede können die Wahrscheinlichkeiten auf diese Weise gut näherungsweise berechnet werden.

Nachdem nun Glaskeile und Strahlteiler beschrieben werden können, müssen noch die Polarisationsfilter beschrieben werden, um alle Versuche aus Abschnitt 2 modellieren zu können.

5.2 Mathematisierung der Polarisations-Zustände

Wie bereits bei den Experimenten festgestellt wurde, kann für den Polarisations-Zustand von Photonen im Wesentlichen die Mathematisierung der Polarisation elektromagnetischer Wellen übernommen werden. Auch für die Polarisationszustände kann bei der Modellierung mit Vektoren gearbeitet werden. Dabei unterscheidet sich allerdings die Funktion der Vektoren. Für die Polarisation ist es nicht sinnvoll die Wahrscheinlichkeiten für Transmission und Absorption als Liste in einen Vektor zu schreiben, da der absorbierte Anteil für weitere Rechnungen unwichtig ist, da absorbierte Photonen nicht gemessen werden können. Die Vektoren werden stattdessen genutzt, um neben der Wahrscheinlichkeit für einen Polarisations-Zustand die Richtung des Zustands anzugeben. Um die Vektoren gut unterscheiden zu können, werden für die Polarisation *Spaltenvektoren* verwendet. Das heißt die Einträge werden untereinander notiert.

Hinter einem Polarisationsfilter ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für die Transmission als Betragsquadrat des resultierenden Vektors und die Richtung des Vektors entspricht dem Polarisationszustand, der Einstellung des Polarisationsfilters.

$|H\rangle$ entspricht $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|V\rangle$ entspricht $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$|45^\circ\rangle$ entspricht $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$|-45^\circ\rangle$ entspricht $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$|\alpha\rangle$ entspricht $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}$

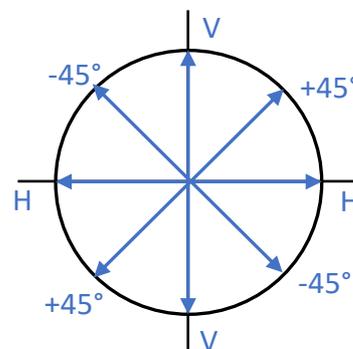


Abbildung 42: Darstellung der Polarisations-Zustände als Vektoren am Einheitskreis

Vektoren lassen sich grundsätzlich in zwei Anteile, die orthogonal zueinander sind aufteilen. Dieses Prinzip ist von der Kräftezerlegung bekannt. Wenn nun also ein Photon mit dem Polarisations-Zustand $|\alpha\rangle$ auf einen Polarisationsfilter mit Winkel β trifft, wird der gesuchte resultierende Vektor genau durch den Anteil des ursprünglichen Vektors (Polarisations-Zustand $|\alpha\rangle$) in Polarisationsrichtung β gegeben. Diese Aufteilung lässt sich sowohl grafisch als auch mathematisch darstellen.

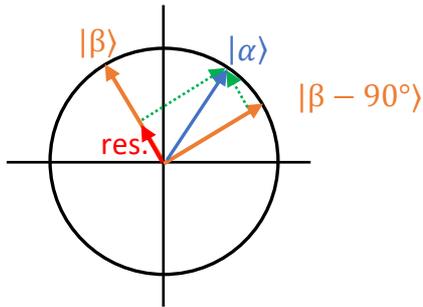


Abbildung 43: Aufteilung des Polarisations-Zustands $|\alpha\rangle$ an einem Polarisationsfilter im Winkel β

Da sich der Vektor zum Polarisations-Zustand so zerlegen lässt, gilt für die Länge des Vektors:

$$\begin{aligned}
 |\text{res.}| &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \\
 &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\
 &= \cos(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

Da der Polarisations-Zustand nach der Messung der Einstellung des Polarisationsfilters entspricht, ist auch die Richtung des Vektors bekannt. Der Vektor hinter dem Polarisationsfilter ist:

$$\cos(\alpha - \beta) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich das Gesetz von Malus: Die Wahrscheinlichkeit für Transmission am Polarisationsfilter liegt bei:

$$P = \cos(\alpha - \beta)^2$$

Dies kann wie folgt für beliebige Vektoren, die den Zustand vor dem Polarisationsfilter angeben, verallgemeinert werden.

Startvektor	Polarisationsfilter	Endvektor
$x \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$		$x \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$
Die Wahrscheinlichkeit in diesem Zustand am Filter anzukommen beträgt:	Der Polarisationsfilter misst im Winkel β .	Die Wahrscheinlichkeit hinter dem Filter anzukommen beträgt:
$P = x^2$	Die Wahrscheinlichkeit für Transmission ist:	$P = x^2 \cdot \cos(\alpha - \beta)^2$
Der Polarisationszustand ist $ \alpha\rangle$.	$P = \cos(\alpha - \beta)^2$	Der Polarisationszustand ist $ \beta\rangle$.

Aufgaben

Aufgabe 1:

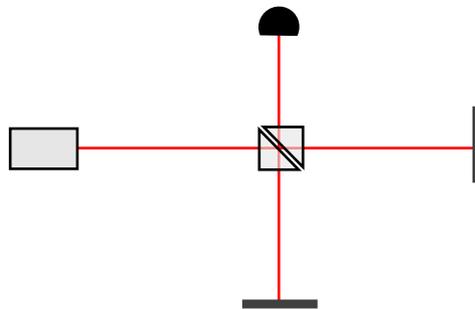
Gib an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten ein Photon hinter den Ausgängen 1 und 2 hinter einem Strahlteiler detektiert wird, wenn $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$ der Output-Vektor ist.

Aufgabe 2:

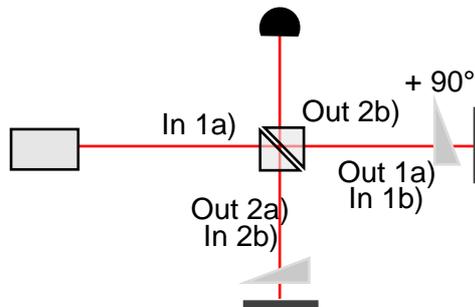
Ein Photon trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von $P_{In\ 1} = \frac{16}{25}$ an Eingang 1 und mit der Wahrscheinlichkeit $P_{In\ 2} = \frac{9}{25}$ an Eingang 2 auf den Strahlteiler. Gib einen Input-Vektor an, der diesen Wahrscheinlichkeiten entspricht.

Aufgabe 3:

Überführe das Michelson-Interferometer in eine Rechnung. Beschrifte zunächst Input und Output am Strahlteiler:



Aufgabe 4: Ordne dem folgenden Michelson-Interferometer die passende Rechnung zu und berechne die Detektionswahrscheinlichkeit am Detektor.



$$\text{a) } (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

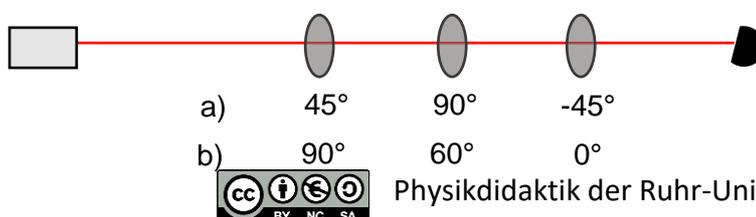
$$\text{b) } (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Bestimme mit welcher Wahrscheinlichkeit Photonen in dem folgenden Aufbau den Detektor erreichen. Die Quelle sendet Photonen im Zustand $|45^\circ\rangle$ aus.



6 Der Photoeffekt und die Elektronenbeugung

Nachdem nun die Wesenszüge der Quantenobjekte betrachtet wurden, ist es sinnvoll zu den historischen Experimenten zurückzukommen, an denen ein Verhalten beobachtet werden konnte, das klassisch nicht erwartet wurde. Klassisch gab es Licht als Welle und Elektronen als Teilchen. Wir wissen nun, dass es sich bei Elektronen und Photonen weder um Wellen, noch um Teilchen, sondern um Quantenobjekte handelt.

Licht wurde klassisch als Welle beschrieben, wobei in dem Hallwachs-Experiment ein Verhalten auftrat, welches man eher von Teilchen kannte. Dieser Versuch wurde bereits in der Einleitung kurz angerissen und führte schließlich zu Einsteins Lichtquantenhypothese.

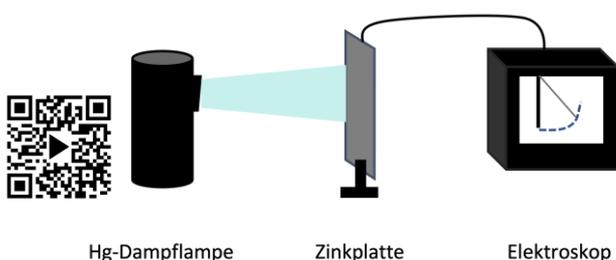


Abbildung 44: Schematischer Aufbau des Hallwachs-Experiments

In dem Experiment wird mit dem vorwiegend ultravioletten Licht einer Quecksilber-Dampflampe eine geladene Zinkplatte bestrahlt. Ist die Zinkplatte positiv geladen ändert sich ihre

Ladung nicht. Ist die Zinkplatte allerdings negativ geladen, dann nimmt die Ladung bei der Bestrahlung mit UV-Licht ab.

Wenn Photonen auf die Zinkplatte treffen, können diese ihre Energie vollständig an Elektronen abgeben. Die Energie eines Photons ist dabei abhängig von der Frequenz des Lichts. Es gilt für die Energie eines Photons:

$$E_{\text{photon}} = h \cdot \nu$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum ist. ($h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{Js}$) Um ein Elektron aus der Zinkplatte „herausschlagen“ zu können, muss die Energie größer sein, als die Austrittsarbeit, die nötig ist, um ein Elektron aus den Atomen zu lösen. Der Rest der Energie wird in kinetische Energie des Elektrons umgewandelt. Es gilt also:

$$E_{\text{kin}} = h \cdot \nu - W_A$$

wobei W_A die Austrittsarbeit bezeichnet. Diese liegt in dem Versuch in einer Größenordnung, dass UV-Licht benötigt wird und sichtbares Licht nicht ausreicht.

Der Photoeffekt ermöglicht die Umwandlung von Licht in Strom und ist damit zum Beispiel die Grundlage für Licht-Detektoren und Solarzellen. Neben einer Energie wird Photonen auch ein Impuls zugeordnet.

$$p_{\text{photon}} = \frac{h}{\lambda}$$

wobei λ die Wellenlänge des Lichts bezeichnet. Da in dieser Form, bevor Photonen als Quantenobjekte besser verstanden wurden, nun Licht, welches ursprünglich als Welle verstanden wurde, ein Teilchencharakter zugeschrieben wurde, formulierte De Broglie 1923 die Theorie, dass Teilchen umgekehrt eine Wellenlänge zugeordnet werden kann. Dass diese in gewisser Weise auch einen Wellencharakter aufweisen. Ein Teilchen der Masse m und Geschwindigkeit v hat den Impuls $p = m \cdot v$. Entsprechend wies er einem Teilchen die DeBroglie-Wellenlänge zu:

$$\lambda_{\text{DeBroglie}} = \frac{h}{m \cdot v}$$

Dass dies sinnvoll ist, wurde an Experimenten von Davisson und Germer deutlich. Wird eine Graphitfolie mit Elektronen beschossen, können auf einem Leuchtschirm, hinter dieser, klar voneinander getrennte Ringe beobachtet werden.

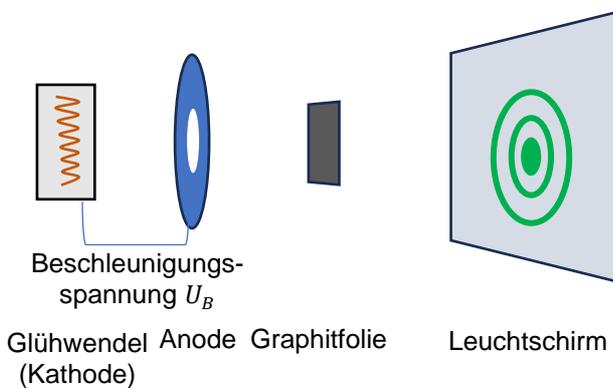


Abbildung 45: Experiment zur Elektronenbeugung
Bei diesen Ringen handelt es sich um ein Interferenzmuster. Die Auftent-

haltungswahrscheinlichkeit von Elektronen wird, wie bei allen Quantenobjekten, durch eine Wellenfunktion beschrieben, sodass Interferenz auftreten kann. Die Elektronen können daher an den Kristallen gebeugt werden:

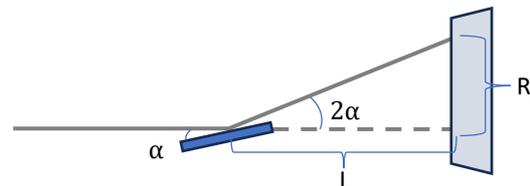


Abbildung 46: Winkel und Längen bei der Elektronenbeugung

Man sieht: $\tan(2\alpha) = \frac{R}{L}$

Zusammen mit der Gleichung für die konstruktive Interferenz bei der Bragg-Reflexion $n \cdot \lambda = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot d$ und der Näherung für kleine Winkel:

$2 \cdot \sin(\alpha) \approx \tan(2\alpha)$ ergibt sich:

$$n \cdot \lambda = \frac{R \cdot d}{L}$$

d bezeichnet dabei die Gitterkonstante, die durch den Kristall gegeben ist. Graphit hat zum Beispiel die zwei Gitterkonstanten $d_1 = 0,123\text{nm}$ & $d_2 = 0,213\text{nm}$. Die Geschwindigkeit der Elektronen kann mit Hilfe der Beschleunigungsspannung berechnet werden:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m}}$$

Da im Experiment gilt:

$$\lambda = \frac{R \cdot d}{L \cdot n} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot e \cdot U_B \cdot m}}$$

konnte dieses die DeBroglie-Hypothese bestätigen.